5. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Если входное сопротивление электрической цепи, содержащей как активные, так и реактивные сопротивления, оказывается чисто активным, то о такой цепи говорят, что она находится в резонансном режиме. При этом ток и напряжение на входе цепи совпадают по фазе.

Выясним особенности этого явления и его связь с так называемыми частотными характеристиками на некоторых частных примерах, подразумевая под частотными характеристиками зависимости от частоты полных, активных и реактивных сопротивлений и проводимостей, а также их аргументов.

С частотными характеристиками связаны токи и напряжения как в цепи в целом, так и на отдельных ее элементах, поэтому частотным характеристикам в электротехнике уделяется достаточно большое внимание.

5.1. РЕЗОНАНС В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЦЕПИ (РЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ)

Полное сопротивление $\underline{Z}$ последовательной цепи (рис. 5.1) равно:

$$\underline{Z} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\cdot\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

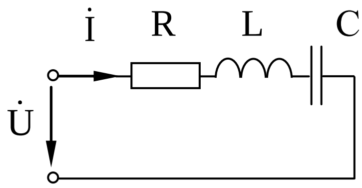


Рис. 5.1. Цепь последовательного резонанса

В резонансном режиме входное сопротивление цепи по определению чисто активное, т.е. выражение в скобках равно нулю:

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0, \tag{5.1}$$

откуда условие резонанса

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}, \text{ или } \omega_0^2 LC = 1. \tag{5.2}$$

Из (5.2) следует, что резонанса можно добиться изменением частоты, индуктивности или емкости. Значение резонансной частоты ω_0 определяется выражением

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{5.3}$$

В режиме резонанса полное сопротивление цепи будет наименьшим, и в ней будет протекать наибольший (резонансный) ток

$$I_0 = \frac{U}{R},$$

величина которого не зависит от значений индуктивного и емкостного сопротивлений. При резонансе напряжения на элементах равны:

$$U_{R0} = I_0 \cdot R = U, \qquad U_{L0} = I_0 \cdot \omega_0 L, \qquad U_{C0} = I_0 \cdot \frac{1}{\omega_0 C}.$$

Из двух последних уравнений с учетом (5.2) следует, что напряжения на реактивных элементах при резонансе равны между собой, а их значения определяются сопротивлениями индуктивности и емкости и могут быть во много раз больше напряжения, приложенного к цепи. Поэтому резонанс в последовательной цепи называется резонансом напряжений, а цепь – последовательным колебательным контуром.

Напряжения на реактивных элементах будут больше приложенного к цепи при выполнении условия

$$R < \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho. \tag{5.4}$$

Величина ρ носит название волнового сопротивления последовательного контура и имеет размерность сопротивления.

Отношение

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C \cdot R} = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{\rho}{R} \tag{5.5}$$

называется добротностью контура и определяет отношение величины напряжения на реактивных элементах при резонансе к напряжению на активном сопротивлении. Величина, обратная добротности

$$d = \frac{1}{Q},$$

носит название затухания контура.

Мгновенные мощности в реактивных элементах цепи согласно (4.56) равны:

$$p_L = U_{mL} I_m \sin 2\omega t, \qquad p_C = -U_{mC} I_m \sin 2\omega t.$$

При резонансе $U_{mL} = U_{mC}$ и $p_L = -p_C$, т.е. в резонансном режиме не происходит обмена мощностью между источником энергии и реактивными элементами. Обмен энергии происходит между электрическим полем конденсатора и магнитным полем индуктивности через каждые четверть периода. Энергия источника расходуется только на потери в активном сопротивлении.

Векторно-топографическая диаграмма при последовательном резонансе (напряжений) при начальной фазе приложенного напряжения, равной нулю, приведена на рис. 5.2.

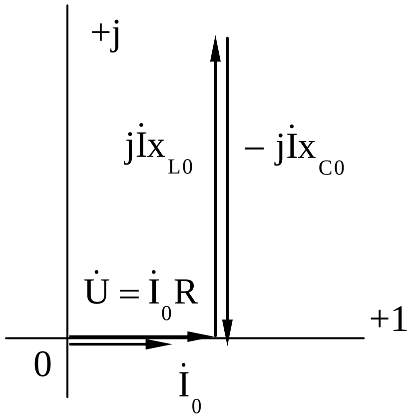


Рис. 5.2. Векторно–топографическая диаграмма при резонансе напряжений

Пример П.5.1. Определить напряжение на индуктивности u_L (рис. 5.1) при резонансе, если u = 100sinωt В; r = 20 Ом; L = 20 мГн; C = 50 мкФ.

Решение.

Определим резонансную частоту:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{20 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^{-6}}} = 1000 \text{ рад/с}.$$

Сопротивления индуктивности и емкости равны:

$$x_L = x_C = \omega L = 1000 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом}.$$

Добротность контура

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{20}{20} = 1,$$

следовательно, напряжение на индуктивности равно входному напряжению. Кроме этого, напряжение на индуктивности по фазе опережает ток на π/2, а фазы тока и приложенного напряжения при резонансе совпадают. Значит, $u_L = 100\sin\left(\omega t + 90^{\circ}\right)$ В.

5.2. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПИ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ R, L, C

Рассмотрим зависимости полного, активного и реактивного сопротивлений и аргумента полного сопротивления от частоты. Такие зависимости называются частотными характеристиками. Активное сопротивление, если не учитывать поверхностный эффект, от частоты не зависит, реактивное сопротивление

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{L}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right). \qquad (5.6)$$

Значение реактивного сопротивления при трех характерных значениях частоты равно либо нулю (при $\omega = \omega_0$), либо бесконечности (при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$).

Значение аргумента функции, при котором функция обращается в нуль, назовем нулем функции, а значение, при котором она равна бесконечности, – полюсом функции. Для рассматриваемой функции $x(\omega)$ полюсами функции будут значения $\omega = 0$ и $\omega = \infty$, а нулем – $\omega = \omega_0$. На рис. 5.3 полюсы функции обозначены звездочками (*), а нули – кружками (о).

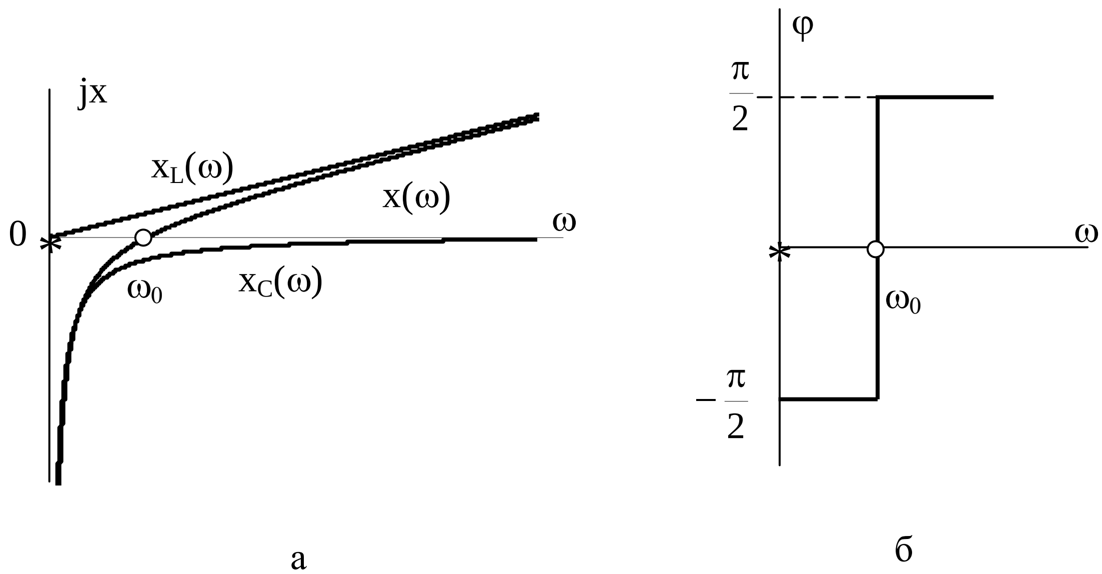


Рис. 5.3. Частотные характеристики последовательного соединения индуктивности и емкости (а – зависимость сопротивления, б – аргумента)

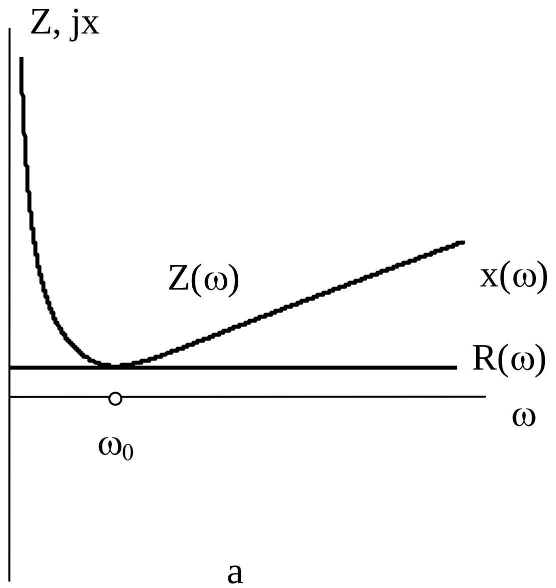
Характерное свойство функции $x(\omega)$ заключается в том, что во всем диапазоне изменения частоты сопротивление $x(\omega)$ постоянно увеличивается. Действительно, из (5.6) имеем $\frac{d(\omega L)}{d\omega} = L$, которая всегда положительна, а производная $\frac{d\left(-\frac{1}{\omega C}\right)}{d\omega} = \frac{1}{\omega^2 C}$ также неотрицательна.

Следовательно, величина x(ω), рассматриваемая алгебраически, постоянно растет. На рис. 5.3 изображены частотные характеристики индуктивности, емкости и их последовательного соединения.

При $0 \le \omega < \omega_0$ сопротивление последовательного соединения определяется емкостной составляющей, которая по величине больше индуктивной, при $\omega_0 < \omega < \infty$ – индуктивной. Величина сопротивления изменяется от $-\infty$ (емкостной характер) до $+\infty$ (индуктивный характер); при $\omega = \omega_0$ сопротивление равно нулю.

Аргумент полного сопротивления при переходе частоты через резонансную скачкообразно изменяется от $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ до $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ одновременно с изменением его характера.

Если же рассматривать частотные характеристики Z(ω) и $\varphi_Z(\omega)$ при наличии в цепи активного сопротивления, то нуля функции Z(ω) не будет. При резонансе ($\omega = \omega_0$) согласно (5.1) x = 0, поэтому Z = R. Не будет и скачкообразного изменения аргумента $\varphi_Z(\omega)$. Частотные характеристики для этого случая приведены на рис. 5.4.



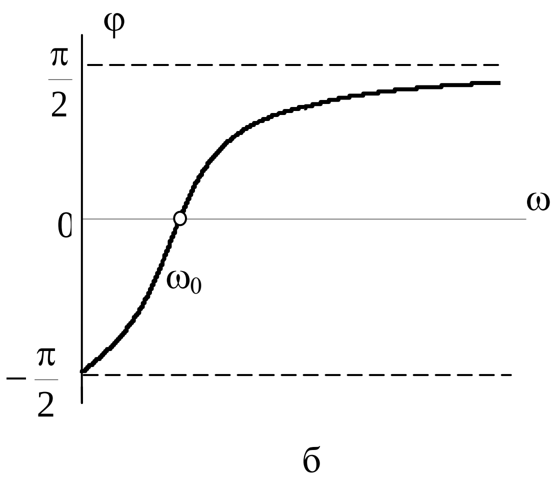


Рис. 5.4. Частотные характеристики последовательной резонансной цепи (а – зависимость сопротивления, б – аргумента)

Рассмотрим зависимость от частоты проводимости той же цепи:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jx} = \frac{R}{Z^2} - j\frac{x}{Z^2} = g - jb. \tag{5.7}$$

Для случая, когда $R = 0$,

$$b = \frac{1}{x} = \frac{1}{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}} = \frac{\omega / L}{\omega^2 - \omega_0^2}. \tag{5.8}$$

Анализ выражения (5.8) показывает, что функция $b(\omega)$ имеет два нуля (при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$) и один полюс при ($\omega = \omega_0$). Нетрудно показать, что во всем диапазоне изменения частоты алгебраическая величина b в (5.8) всегда увеличивается. Действительно,

$$\frac{db}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{d\omega}$$

Так как $x^2 > 0$ и $\dfrac{dx}{d\omega} > 0$, то $\dfrac{db}{d\omega} < 0$. Но с учетом изменения знака при b в (5.7) реактивная проводимость всегда увеличивается. Как увидим в дальнейшем, это

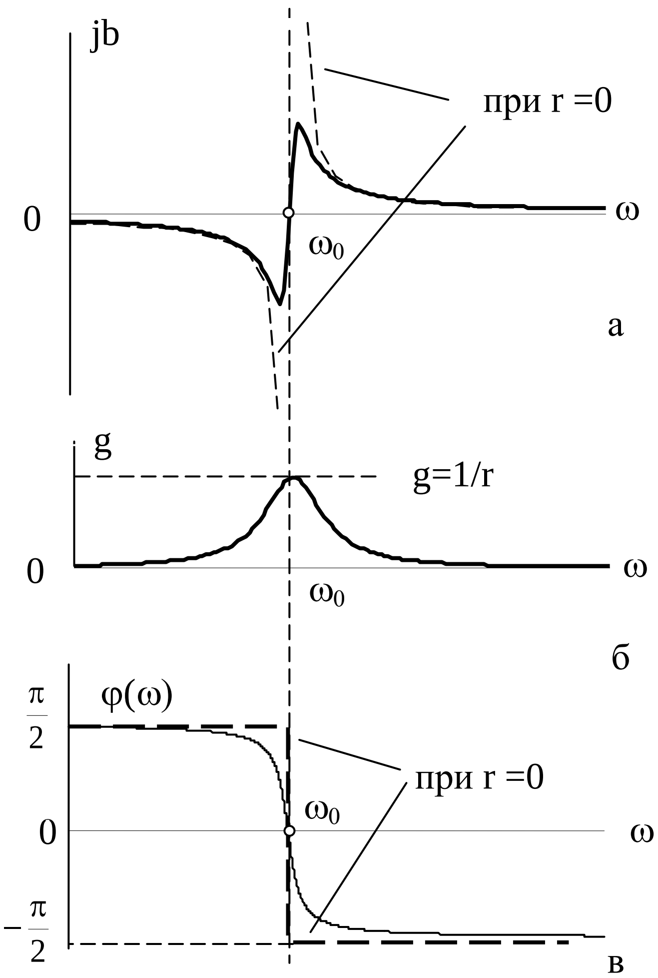


Рис. 5.5. Частотные характеристики модулей проводимостей (а, б) и их аргумента (в) последовательной резонансной цепи

свойство характерно для любого реактивного двухполюсника.

Частотные характеристики $b(\omega)$ при наличии активного сопротивления в цепи показаны на рис. 5.5, а пунктиром.

Если активное сопротивление в цепи присутствует, то на резонансной частоте $b = 0$, но переход b через нуль плавный, причем наклон кривой $b(\omega)$ к оси частот определяется величиной сопротивления R: чем оно меньше, тем круче кривая. Функция $b(\omega)$на частотах

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{d^2}{4}} \pm \frac{d}{2} \right]$$

имеет экстремумы, равные соответственно $b_1 = b_2 = \dfrac{1}{2R}$.

Ток в цепи равен:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}. \qquad (5.9)$$

При резонансе, когда $\omega = \omega_0$, ток в цепи $I_0 = \dfrac{U}{R}$, а напряжения на индуктивности и емкости равны соответственно:

$$U_{L0} = \omega L I_0 = U \frac{Q \dfrac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}};$$

$$U_{C0} = \frac{1}{\omega C} I_0 = U \frac{Q \dfrac{\omega_0}{\omega}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}. \qquad (5.10)$$

На рис. 5.6 приведены частотные характеристики $I(\omega)$, $U_R(\omega)$, $U_L(\omega)$ и $U_C(\omega)$ при $Q > 1$. Ток равен нулю при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ и максимален при $\omega = \omega_0$. Напряжение на активном сопротивлении также равно нулю при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ и приложенному напряжению U при резонансе ($\omega = \omega_0$).

Напряжение на индуктивности $U_L = 0$ при $\omega = 0$, достигает максимума при $\omega > \omega_0$ и асимптотически приближается к U при бесконечном увеличении частоты.

Частоту, при которой $U_L = U_{Lmax}$, можно определить, приравняв производную первого из выражений (5.10) к нулю.

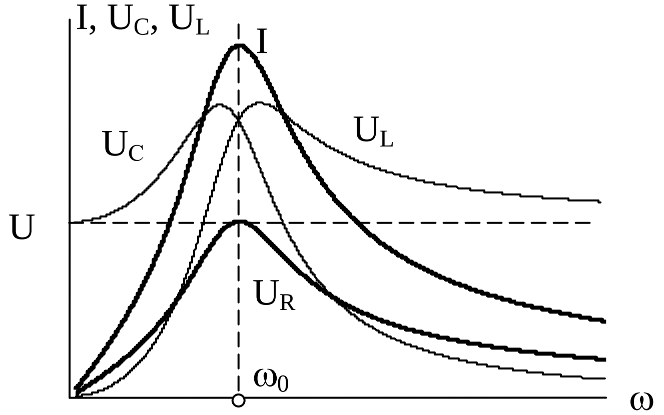


Рис. 5.6. Амплитудно-частотные характеристики последовательной цепи

Тогда

$$\omega_{L\max} = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2 - \frac{R^2C}{L}}}. \qquad (5.11)$$

Напряжение на емкости равно приложенному напряжению U при $\omega = 0$, нулю – при $\omega = \infty$ и максимально на частоте

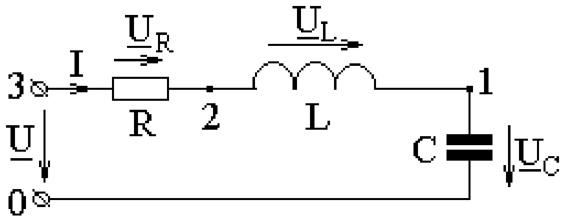
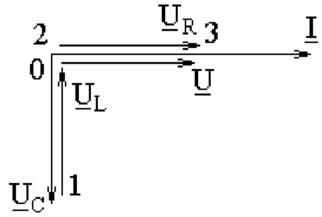
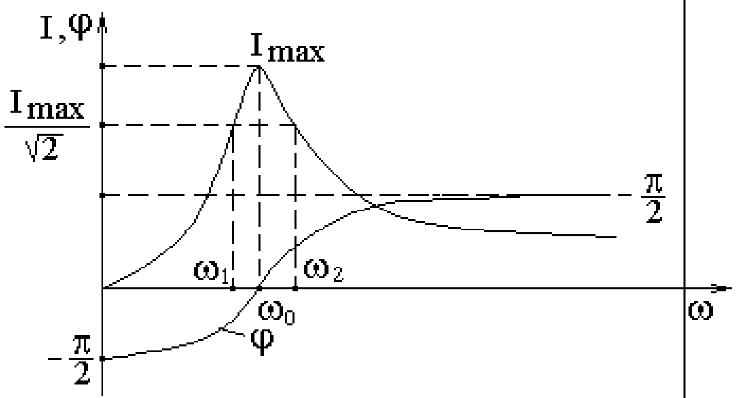
$$\omega_{C\max} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{2}{2 - \frac{R^2C}{L}}}}. \qquad (5.12)$$

Полосой пропускания резонансного контура принято считать интервал частот, где $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$, т.е. когда мощность I^2R, поглощаемая цепью, не превышает половины максимальной мощности при резонансе, равной I_0^2R. Полоса пропускания последовательного резонансного контура равна

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q}. \qquad (5.13)$$

Основные соотношения для простейшей резонансной цепи, состоящей из последовательно соединенных R, L, C - элементов, приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Резонанс напряжений в последовательном RLC – контуре	
Условие резонанса: $X = \omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C) = 0$, или $X_L = X_C$, при этом $\underline{I} = \underline{I}_{max} = \underline{U} / R$	
Напряжения на реактивных элементах: $\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}$; $\underline{U}_C = -\, {}^{j}\!/_{\omega C} \cdot \underline{I}$; $U_L = U_C$ (по модулю)	Векторная диаграмма 
Резонансная частота	$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = 1/\sqrt{L \cdot C}$
Характеристическое сопротивление	$\rho = \omega_0 \cdot L = 1/(\omega_0 \cdot C) = \sqrt{L / C}$
Добротность контура определяет, во сколько раз напряжение на реактивном элементе при резонансе превышает входное	$Q = \dfrac{U_L}{U} = \dfrac{U_C}{U} = \rho / R$
Частотные характеристики $I(\omega)$, $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$, $\varphi(\omega)$ называют резонансными. В качестве примера показаны $I(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, построенные по формулам: $I(\omega) = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}$ $\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$	
Полоса пропускания контура определяется по уровню $I_{max}/\sqrt{2}$ резонансной кривой тока $I(\omega)$	$\Pi_\omega = \omega_2 - \omega_1$
Добротность контура, полоса пропускания и резонансная частота связаны между собой	$\Pi_\omega = \omega_0/Q$; $Q = \omega_0/\Pi_\omega$; $\omega_0 = \Pi_\omega \cdot Q$

5.3. РЕЗОНАНС В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ЦЕПИ (РЕЗОНАНС ТОКОВ)

Исходя из условия резонанса – совпадения фаз напряжения и тока на входе цепи – можно констатировать, что при параллельном резонансе входная реактивная проводимость цепи (рис. 5.7, а) должна быть равна нулю:

$$b = \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0, \qquad \text{или} \qquad \omega_0^2 LC = 1. \tag{5.14}$$

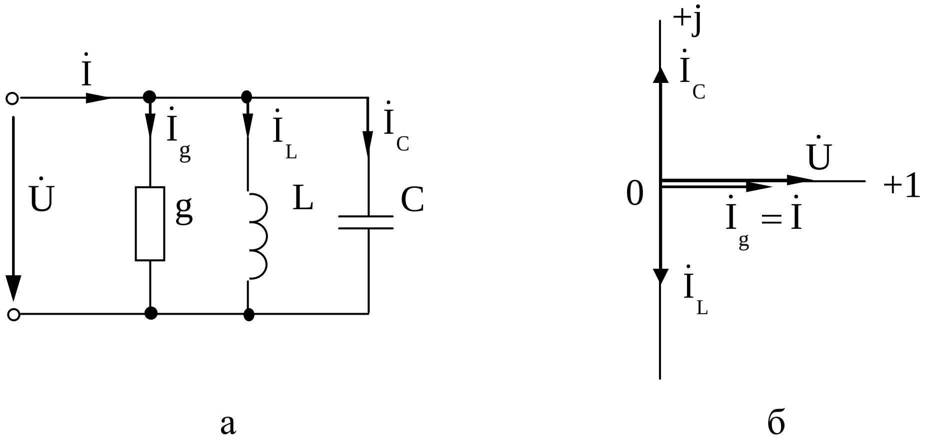


Рис. 5.7. Схема параллельной резонансной цепи (а)
и векторная диаграмма напряжения и токов (б)

Таким образом, резонансная частота ω_0 равна:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{5.15}$$

что совпадает с выражением (5.3), полученным для последовательной резонансной цепи.

Из (5.15) следует, что явления резонанса в параллельной электрической цепи можно добиться, изменяя либо индуктивность или емкость, либо частоту.

При резонансе полная проводимость достигает минимального значения, и ток в цепи при резонансе наименьший в отличие от последовательного резонанса, когда ток наибольший. Векторная диаграмма токов и приложенного напряжения при резонансе приведена на рис. 5.7, б.

Так как при параллельном резонансе компенсируются реактивные составляющие токов, то такой резонанс называют резонансом токов.

Как и при резонансе напряжений, при резонансе токов не происходит обмена энергией между источником и реактивными элементами. Колебания энергии происходят внутри цепи между индуктивными и емкостными элементами.

Превышение токов в реактивных элементах цепи над входным происходит при выполнении условия

$$g < \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma. \tag{5.16}$$

Величина $\sqrt{\frac{C}{L}}$ называется волновой проводимостью контура.

Кратность превышения токов в реактивных элементах определяется добротностью контура:

$$Q = \frac{\omega_0 C}{g} = \frac{1}{\omega_0 L g} = \frac{\gamma}{g}. \tag{5.17}$$

Как и при последовательном резонансе, величина, обратная добротности, носит название затухания:

$$d = \frac{1}{Q}.$$

Пример П.5.2. Определить значение сопротивления x_2, при котором в цепи на рис. 5.8 наступит резонанс, если r_1 = 5 Ом, x_1 = 5 Ом, r_3 = 10 Ом.

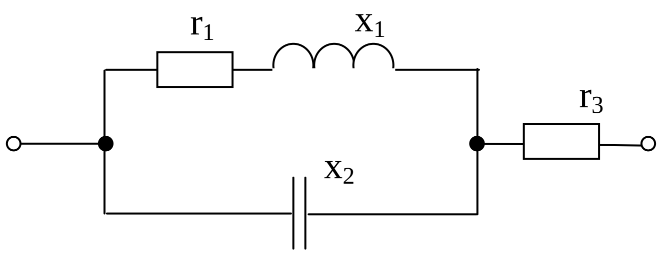


Рис. 5.8. Схема к примеру **П.5.2**

Решение.

В цепи активно-индуктивное сопротивление включено параллельно емкостному. Последовательно включенные активное и индуктивное сопротивления можно преобразовать в параллельно соединенные согласно (4.39).

В преобразованной схеме параллельно включены индуктивное и емкостное сопротивления, т.е. в ней возможен резонанс токов. Условием резонанса является равенство реактивных проводимостей $b_L = b_C$, или

$$\frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2} = \frac{1}{x_2}.$$

Подставляя значения сопротивлений, получаем: $b_L = 0{,}1\ \frac{1}{\text{Ом}}$, или

$$x_2 = \frac{1}{b_C} = \frac{1}{b_L} = 10 \text{ Ом.}$$

5.4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПИ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ g, L, C

Рассмотрим зависимости реактивной и полной проводимостей от частоты в схеме с параллельными элементами g, L, C. Активная проводимость от частоты не зависит. Реактивная проводимость

$$b = b_L - b_C = \omega C - \frac{1}{\omega L} = \frac{C}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) \qquad (5.18)$$

имеет три характерные частоты: $\omega = 0$, $\omega = \infty$, $\omega = \omega_0$.

Функция $b(\omega)$ имеет два полюса: при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ и один нуль $\omega = \omega_0$. При всех частотах $b(\omega)$ возрастает, поскольку величина

$$\frac{db}{d\omega} = \frac{1}{\omega^2 L} + C$$

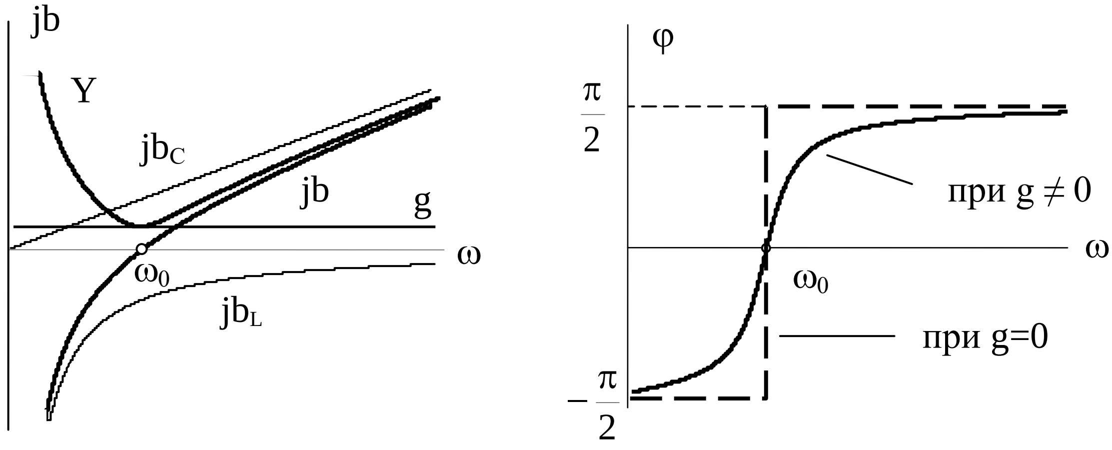
всегда положительна.

При $\omega = \omega_O$ происходит скачкообразное изменение аргумента проводимости. Частотные характеристики реактивной проводимости приведены на рис. 5.9.

Частотная характеристика цепи $U(\omega)$ при неизменном токе I = const определяется выражением

$$U = \frac{I}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} = \frac{I}{g}\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}. \qquad (5.19)$$

Сравнивая (5.19) и (5.9), находим, что формулы идентичны, только току в (5.9) соответствует напряжение в (5.19), а напряжению в (5.9) – ток в (5.19).



а б

Рис. 5.9. Частотные характеристики модулей проводимостей (а, б) и их аргумента (в) параллельной резонансной цепи

Поэтому зависимости $I_L(\omega)$, $I_C(\omega)$ и другие можно получить, используя соответствующие уравнения для последовательной схемы.

Цепи, для которых уравнения полностью совпадают при соответствующей замене токов на напряжения, емкостей – на индуктивности, сопротивлений – на проводимости, а источников тока – на источники ЭДС, называются дуальными.

Используя свойство дуальности, построим частотные характеристики параллельной резонансной схемы при резонансе токов по уравнениям (5.9 – 5.12) (рис. 5.10).

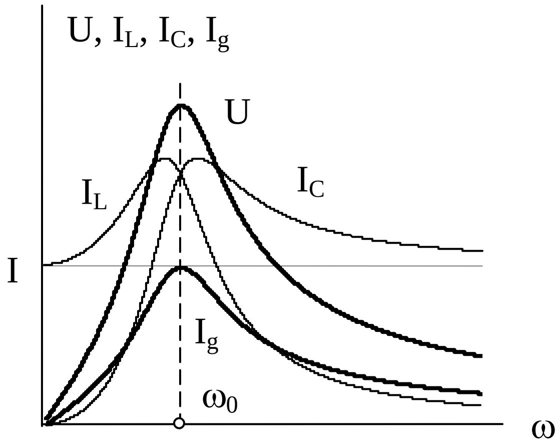


Рис. 5.10. Амплитудно-частотные характеристики параллельной цепи

Основные соотношения для параллельных контуров без потерь и с потерями приведены в табл. 5.2 и 5.3.

Таблица 5.2

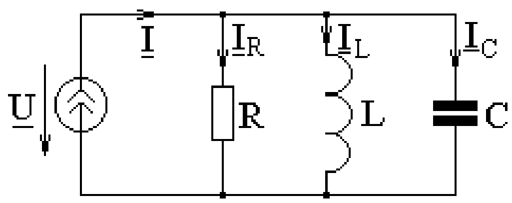
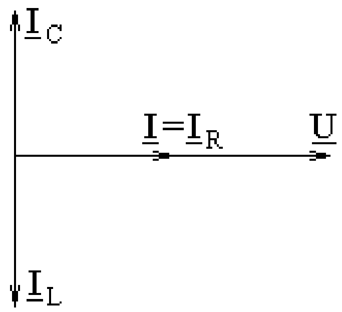
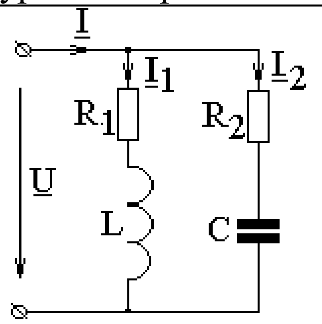
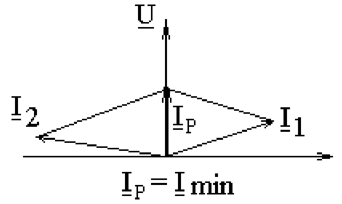
Параллельный RLC - контур	
Условие резонанса: $\underline{Y}$ = G, b = 0, где G = 1/R, b = 1/(ωL) - ωC, при этом U = I/G.	
Токи в ветвях при резонансе: $\underline{I}_L = \underline{U}/(j\omega L)$; $\underline{I}_C = j\omega C\underline{U}$; $\underline{I} = \underline{I}_R = \underline{U}/R$	Векторная диаграмма 
Резонансная частота	$\omega_P = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$
Добротность контура	$Q = I_L/I = I_C/I = R/\rho$
Частотные характеристики $I_L(\omega)$, $I_C(\omega)$, $U(\omega)$ – подобны (дуальны) характеристикам $U_C(\omega)$, $U_L(\omega)$ и $I(\omega)$ последовательного контура	

Таблица 5.3

Резонанс токов в параллельном контуре с потерями	
Условие резонанса $\underline{Y} = G,\ b = 0$, где $G = \dfrac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} + \dfrac{R_2}{R_2^2 + X_C^2};$ $b = \dfrac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} - \dfrac{X_C}{R_2^2 + X_C^2};$ $X_L = \omega L, \quad X_C = 1/(\omega C)$	
Токи в ветвях при резонансе: $\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{U}}{R_1 + jX_L}; \quad \underline{I}_2 = \dfrac{\underline{U}}{R_2 - jX_C};$ $\underline{I} = \underline{I}_p = \underline{U} / Z_p = \dfrac{\underline{U}(R_1 + R_2)}{R_1 \cdot R_2 + \rho^2}$	Векторная диаграмма 
Резонансная частота и характеристическое сопротивление	$\omega_p = \omega_0 \cdot \sqrt{\dfrac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}},$ где $\rho = \sqrt{L / C},\ \ \omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$
Добротность контура	$Q = \dfrac{\omega_p \cdot L}{R_1 + R_2 \cdot \omega_p^2 / \omega_0^2},$ при $\omega_p \approx \omega_0 \quad Q = \dfrac{\rho}{R_1 + R_2}$ Если R_1=0, то $Q = \dfrac{1}{\omega_p \cdot C \cdot R_2} =$ $= \sqrt{\rho^2 / R_2^2 - 1} = I_1/I_p$ Если R_2 = 0, то $Q = \dfrac{\omega_p \cdot L}{R_1} = \sqrt{\rho^2 / R_1^2 - 1} = I_2 / I_p$

5.5 Частотные характеристики цепей, содержащих только реактивные элементы

Ток пассивного двухполюсника можно определить как ток контура с ЭДС, действующей на его входе:

$$\dot{I}_{вх} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \cdot \dot{E}_{вх} = \underline{Y}_{вх} \cdot \dot{E}_{вх}, \tag{5.20}$$

где $\underline{Y}_{вх} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}$, а Δ – определитель *n*-го порядка системы уравнений цепи, записанных по методу контурных токов, имеющий *n* строк и *n* столбцов, Δ_{11} – его алгебраическое дополнение (минор), имеющее $n - 1$ строк и $n - 1$ столбцов.

Если двухполюсник состоит только из реактивных элементов, то каждый из элементов определителей Δ и Δ_{11} содержит в общем случае собственные и взаимные сопротивления вида

$$\begin{gathered} \underline{Z}_{ii} = jx_{ii} = \left(j\omega L_{ii} - \frac{j}{\omega C_{ii}} \right) = \frac{j}{\omega}\left(\omega^2 L_{ii} - \frac{1}{C_{ii}} \right); \\ \underline{Z}_{kq} = jx_{kq} = \frac{j}{\omega}\left(\omega^2 L_{kq} - \frac{1}{C_{kq}} \right), \end{gathered} \tag{5.21}$$

т.е. во всех элементах определителя и его алгебраического дополнения содержится множитель $\frac{j}{\omega}$ при вещественных величинах. Следовательно,

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{1}{\underline{Y}_{вх}} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{\left(\frac{j}{\omega}\right)^n}{\left(\frac{j}{\omega}\right)^{n-1}} \cdot \frac{\Delta'}{\Delta'_{11}} = \frac{j}{\omega} \cdot \frac{\Delta'}{\Delta'_{11}}, \tag{5.22}$$

где Δ' и Δ'_{11} – вещественны.

Так как определитель содержит только мнимые коэффициенты, то

$$\begin{gathered} \underline{Z}_{вх} = jx_{вх}; \\ x_{вх} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta'}{\Delta'_{11}}. \end{gathered} \tag{5.23}$$

Раскрыв определители, получим полином вида

$$x_{вх} = \frac{a_{2n}\omega^{2n} + a_{2n-2}\omega^{2n-2} + \ldots + a_0}{\omega \cdot \left(b_{2n-2}\omega^{2n-2} + b_{2n-4}\omega^{2n-4} + \ldots + b_0 \right)}. \tag{5.24}$$

После нахождения корней полинома числителя (ω_1, ω_3, … , ω_{2n-1}) и полинома знаменателя (ω_2, ω_4, … , ω_{2n}), уравнение (5.24) можно записать в виде

$$x_{вх} = \frac{a_{2n}}{b_{2n-2}} \cdot \frac{\left(\omega^2 - \omega_1^2\right)\cdot\left(\omega^2 - \omega_3^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\omega^2 - \omega_{2n-1}^2\right)}{\omega \cdot \left(\omega^2 - \omega_2^2\right)\cdot\left(\omega^2 - \omega_4^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\omega^2 - \omega_{2n}^2\right)}. \tag{5.25}$$

Положив числитель равным нулю, определим нули функции x(ω), а приравняв к нулю знаменатель, найдем полюсы функции. Характерное свойство реактивного двухполюсника заключается в том, что его сопротивление с увеличением частоты также увеличивается (это утверждение доказывается при изучении синтеза электрических цепей). А это значит, что полюсы и нули функции x(ω) чередуются, соответственно чередуются резонансы токов и напряжений, т.е. $0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_{2n-1} < \omega_{2n}$. В каждом полюсе и нуле аргумент сопротивления скачкообразно изменяется от $\pm\frac{\pi}{2}$ до $\mp\frac{\pi}{2}$.

В (5.24) и (5.25) степень частоты ω в числителе на единицу больше степени ω в знаменателе. Может оказаться, что в (5.24) коэффициент $a_{2n} = 0$, тогда степень ω в числителе в (5.24) и (5.25) будет на единицу меньше степени ω в знаменателе. ***Но как в первом, так и во втором случае разность степеней всегда будет равна единице.***

Когда степень числителя больше степени знаменателя, то первый нуль функции будет при ω = 0, если наоборот, то при ω = 0 первым будет полюс.

В качестве примеров рассмотрим схемы, изображенные на рис. 5.11, а и 5.12, а. В первом случае первая частота ω = 0 есть нуль функции x(ω), во втором – полюс.

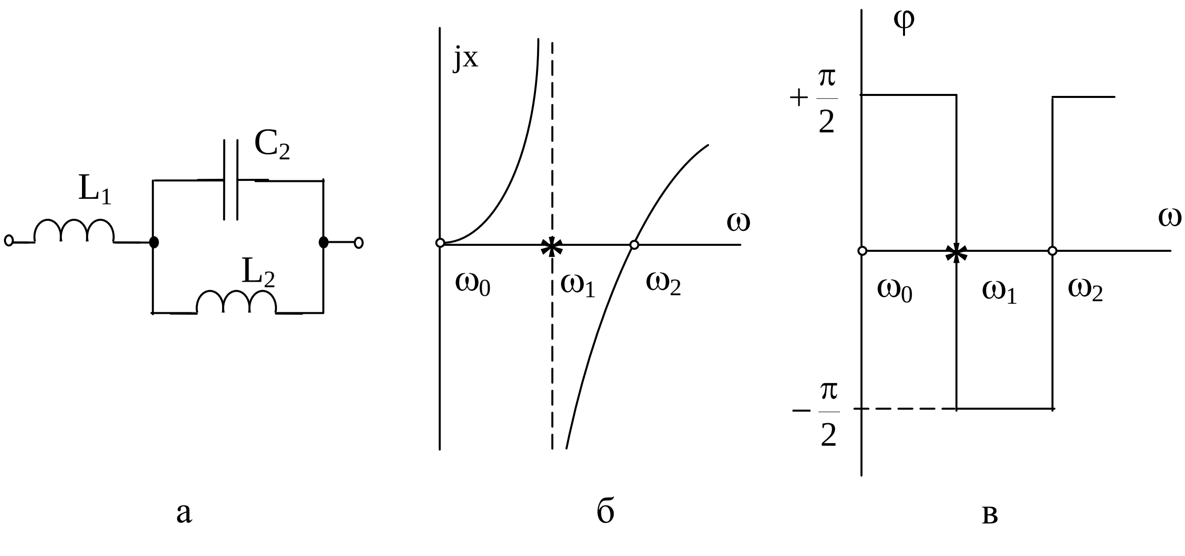


Рис. 5.11. Схема двухполюсника (а) и его частотные характеристики (б, в)

Сопротивление двухполюсника, схема которого изображена на рис. 5.11, а, равно:

$$x = \omega L_1 + \frac{-\dfrac{\omega L_2}{\omega C_2}}{\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C_2}} = \frac{\omega^3 L_1 L_2 C_2 - \omega(L_1 + L_2)}{\omega^2 L_2 C_2 - 1} = \frac{\omega\left[\omega^2 L_1 L_2 C_2 - (L_1 + L_2)\right]}{\omega^2 L_2 C_2 - 1}.$$

Положив числитель и знаменатель равными нулю, имеем:

$\omega_1 = 0,\ \omega_3 = \sqrt{\dfrac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C_2}},\ \omega_2 = \dfrac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$, причем ω_1 и ω_3 – нули; ω_2 – полюс. Положив $\omega = \infty$, получим еще один полюс функции.

Частотные характеристики схемы приведены на рис. 5.11, б, в.

Сопротивление двухполюсника на рис. 5.12, а определяется выражением

$$x = \frac{-\omega^2 L_1 C_1 + 1}{\omega \cdot \left[\omega^2 L_1 C_1 C_2 - (C_1 + C_2)\right]}.$$

Положив числитель и знаменатель дроби равными нулю, получим нуль $x(\omega)$ при $\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$, полюсы при $\omega_0 = 0$ и $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{C_1 + C_2}{L_1 C_1 C_2}}$. Еще один нуль будет при $\omega = \infty$. Частотные характеристики схемы изображены на рис. 5.12, б, в.

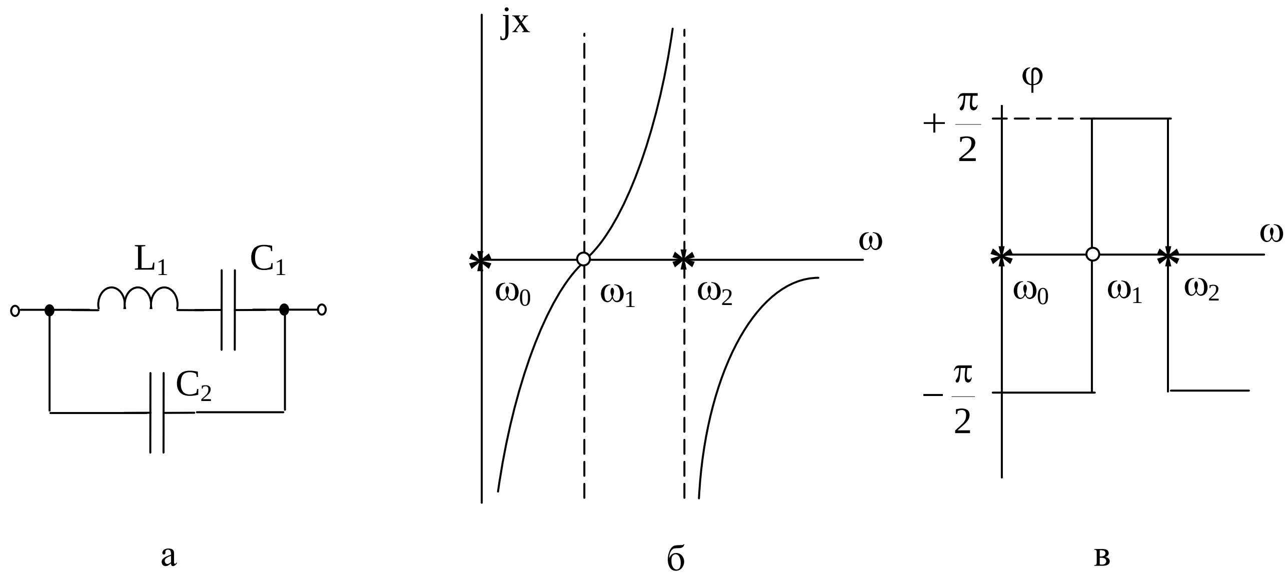


Рис. 5.12. Схема двухполюсника (а) и его частотные характеристики (б, в)

Примеры и упражнения

П.5.3. В цепи синусоидального тока (рис. 5.13) все три вольтметра V_1, V_2, V_3 имеют одинаковые показания – по 54 В.

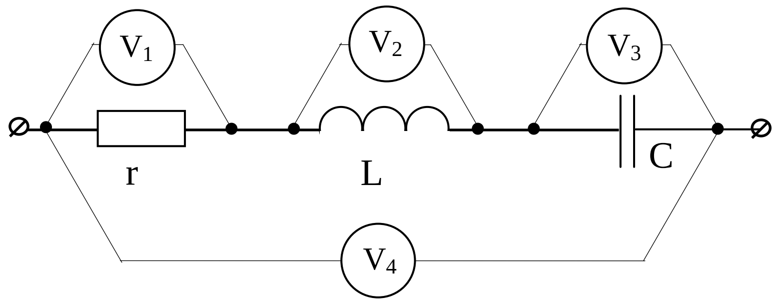


Рис. 5.13. Схема к примеру **П.5.3**

Написать выражение для мгновенного значения общего напряжения u, если начальная фаза напряжения на индуктивности u_L равна $+38^o$.

Ответ: $u = 54\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 52^o\right)$.

П.5.4. Определить, при каком значении сопротивления r_1 в цепи на рис. 5.14 наступит резонанс, если x_1= 4 Ом, x_2 =2 Ом, r_2 = 5 Ом.

Указание. Преобразовать параллельное соединение r_1 и x_1 в последовательное.

Ответ: 10 Ом.

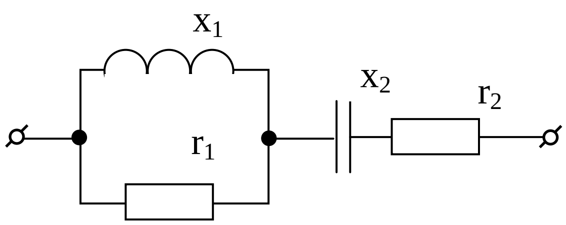


Рис. 5.14. Схема к примеру **П.5.4**

П.5.5. Как изменятся показания амперметра после замыкания рубильника в схеме рис. 5.15, если r = x_C = x_L?

Ответ: увеличится в $\sqrt{2}$ раз.

П.5.6. Определить показание амперметра электромагнитной системы, включенного в цепь (рис. 5.16), если в параллельных ветвях протекают равные токи величиной 10 А.

Ответ: I = 0.

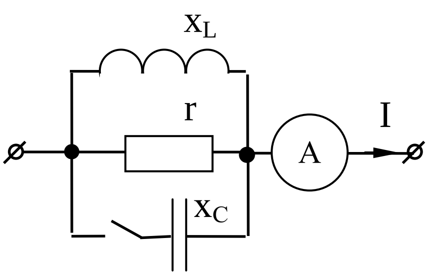


Рис. 5.15. Схема к примеру **П.5.5**

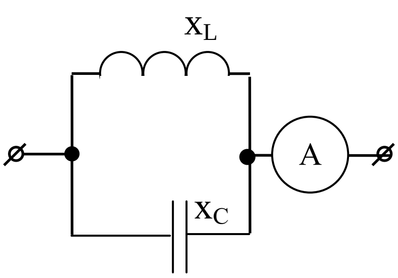


Рис. 5.16. Схема к примеру **П.5.6**

П.5.7. Определить значение сопротивления x_1, при котором в цепи (рис. 5.17) наступает резонанс токов, если $r_1 = 4$ Ом, $r_2 = 2$ Ом, $x_2 = -4$ Ом, $x_3 = 5$ Ом.

Указание. Условие резонанса $b_L = b_C$.

Ответ: Резонанс невозможен ни при каком значении x_1.

П.5.8. Определить действующее значение напряжений между точками А–В; А–С цепи (рис. 5.18), если приложенное напряжение $U = 100\sqrt{2}\sin\omega t$ В, а сопротивления $r = x_L = x_C = 10$ Ом.

Определить токи в ветвях.

Ответ: U_{AB} = 100 В, U_{AC} = 0, I_r = 0, $I_L = I_C$ = 10 А.

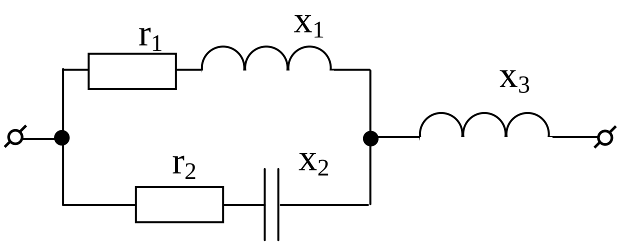


Рис. 5.17. Схема к примеру **П.5.7**

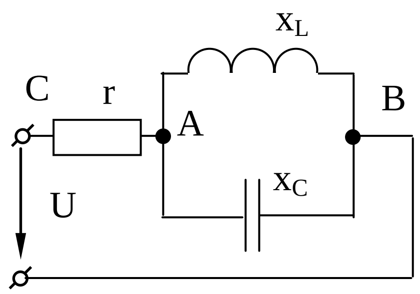


Рис. 5.18. Схема к примеру **П.5.8**

П.5.9. Найти выражение мгновенного значения тока i в неразветвленной части цепи на рис. 5.19, если приложенное напряжение равно $u = 141\sin(\omega t + 30^{\circ})$, а все сопротивления одинаковы: $r = x_L = x_C = 10$ Ом.

Ответ: $i = 14{,}1\sin(\omega t + 30^{\circ})$.

П.5.10. В схеме на рис. 5.20 дано: I = 10 А, U = 100 В, $\underline{Z} = r + jx$, $r = \frac{Z}{2}$.

1. Определить показание ваттметра.

2. Какое дополнительное сопротивление необходимо включить в цепь, чтобы показания ваттметра были максимальны?

Ответ: 1. 500 Вт;

2. Емкостное сопротивление x_C = 8,66 Ом.

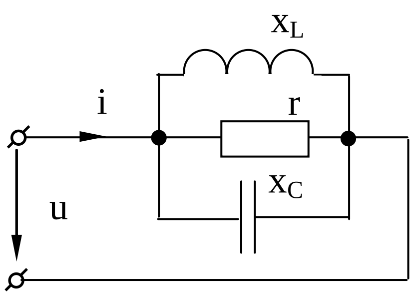


Рис. 5.19. Схема к примеру **П.5.9**

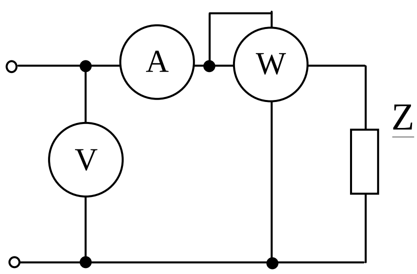


Рис. 5.20. Схема к примеру **П.5.10**