
1.1 ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ, ЭЛЕМЕНТЫ И ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1.1.1 ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ

Электрической цепью называется совокупность элементов и устройств, предназначенных для создания, передачи и потребления электрической энергии. Электрическая цепь содержит источники и потребители электрической энергии, а также промежуточные элементы и устройства.

Источниками электрической энергии являются устройства, преобразующие энергию различного вида в электрическую (химические, механические, термические, световые и пр.).

Приемниками электрической энергии являются устройства, преобразующие электрическую энергию в другой вид энергии.

Промежуточные элементы и устройства служат для передачи электрической энергии от источников к приемникам. В зависимости от назначения они либо непосредственно передают электрическую энергию с параметрами источника (провода, коммутационная аппаратура), либо преобразуют ее в энергию с другими параметрами (трансформаторы, выпрямители, инверторы и пр.). В зависимости от процессов, рассматриваемых в той или иной части электрической цепи, одни и те же промежуточные элементы (устройства) могут быть отнесены как к источнику, так и к потребителю электрической энергии.

Примером такой цепи является цепь, состоящая из источника переменного напряжения, промежуточных элементов, соединяющих этот источник с выпрямителем, и подключенного к его выходу через промежуточные элементы потребителя постоянного напряжения. Часть цепи, включающая источник электрической энергии и промежуточные элементы до выпрямителя, питается переменным током, вторая часть – от выпрямителя до потребителя – постоянным.

Если требуется провести анализ процессов, происходящих в цепи постоянного тока, то всю часть цепи от источника электрической энергии до выпря-

мителя с некоторым допущением можно рассматривать как источник постоянного тока. И напротив, рассматривая выпрямитель (вместе с частью цепи постоянного тока) как потребитель электрической энергии, можно исследовать процессы в цепи переменного тока.

В теории электрических цепей рассматриваются не физические тела и устройства, а их математические и физические модели, процессы в которых адекватны процессам в реальных прототипах. Например, термин «источник электрической энергии» подразумевает, что рассматривается модель реального источника, подключение которой к модели электрической цепи вызывает такие же токи, что и в реальной цепи с подключенным реальным источником.

Часть цепи, содержащей источники электрической энергии, будем называть **активной**, не содержащей – **пассивной**.

1.1.2 ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

Электрический ток вызывается изменением (переносом) заряда и равен скорости изменения этого заряда:

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (1.1)$$

где q – электрический заряд.

Электрическому току задается направление. В общем случае ток представляет собой движение носителей зарядов обоих знаков в противоположных направлениях, но принято положительным считать ток, обусловленный перемещением положительных зарядов.

За единицу измерения силы тока в системе СИ принят ампер (А) – величина неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызывает между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины. Соответственно заряд q , согласно (1.1), измеряется в (А·с). Такая единица заряда называется кулоном (Кл): $[\text{Кл}] = [\text{А} \cdot \text{с}]$.

Электрический ток может быть неизменным во времени или изменяющимся. Неизменный во времени ток принято называть постоянным током, а цепи, в которых протекают такие токи, – цепями постоянного тока.

Постоянные токи обозначаются заглавными буквами латинского алфави-

та (I), мгновенные значения – строчными (i).

Помните: правильное применение символов и общепринятых обозначений свидетельствует о Вашей инженерной культуре и позволяет быстрее понять Ваши записи.

Одной из основных задач электротехники является определение реальных токов в электрической цепи, которые, как правило, заранее неизвестны. Чтобы решить эту задачу, выбирают положительные направления токов. **Положительное направление тока выбирается произвольно и указывается стрелкой.** Если в результате расчета значение тока получилось отрицательным, то это означает, что в действительности он протекает в противоположном направлении.

Изобразим некоторый элемент электрической цепи (рис. 1.1), через который протекает ток i и обозначим концы участка цифрами 1 и 2. Выберем положительное направление тока от точки 1 к точке 2.

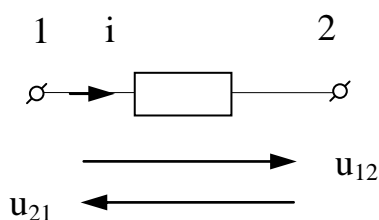


Рис. 1.1. Участок электрической цепи с выбранными положительными направлениями тока и напряжения

Разность электрических потенциалов между точками 1 и 2 носит название напряжения на данном участке, которое определяется работой, затрачиваемой на перенос положительного единичного заряда из точки 1 в точку 2.

Мгновенные значения напряжения принято обозначать буквой u , постоянное напряжение – U . Единицей напряжения является вольт (В).

Согласно определению размерностью вольта [В] является $\left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}} \right]$ (ньютонометр/амперсекунда).

Положительное направление напряжения совпадает с положительным направлением тока. На рис. 1.1 $u_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 > 0$ (φ_1 и φ_2 – соответственно потенциалы точек 1 и 2). Напряжение, отсчитываемое в обратном направлении,

имеет противоположный знак:

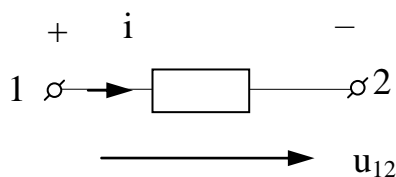


Рис. 1.2. Использование положительного и отрицательного потенциалов при определении положительных направлений тока и напряжения

$$u_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = -u_{12}.$$

За положительное направление тока принято считать направление движения положительных зарядов, следовательно, ток протекает от точки с большим потенциалом в точку с меньшим, или – от положительного потенциала к отрицательному (рис. 1.2). Пока нет достаточного навыка, **целесообразно принимать за положительное направления тока (и напряжения) направление движение зарядов от положительного потенциала к отрицательному.**

1.1.3 МГНОВЕННАЯ МОЩНОСТЬ И ЭНЕРГИЯ

При перемещении между двумя точками, имеющими разность потенциалов u , бесконечно малого заряда dq , в каждую единицу времени выполняется работа, численно равная энергии:

$$dW = u \cdot dq = u \cdot i \cdot dt.$$

Производная энергии по времени является мгновенной мощностью:

$$p = \frac{dW}{dt} = u \frac{dq}{dt} = u \cdot i.$$

Следовательно, **мгновенная мощность, поступающая в приемник, равна произведению мгновенных значений тока и напряжения.** Она положительна при одинаковых знаках u и i и отрицательна при разных. Положительное значение мощности означает, что мощность поступает в приемник, отрицательное – что возвращается в источник питания.

Энергию, потребляемую приемником за промежуток времени от t_1 до t_2 , можно определить как

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p dt.$$

Мощность измеряется в ваттах (Вт), $[Вт]=[В \cdot А]$, энергия – в джоулях (Дж), $[Дж]=[В \cdot А \cdot с]$.

1.1.4 ПАССИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

1.1.4.1 Сопротивление

Сопротивлением называется идеализированный элемент цепи, приближенно заменяющий резистор, в котором происходит необратимый процесс преобразования электрической энергии в тепловую. Условное графическое обозначение резистора приведено на рис. 1.1, буквенное обозначение – R или r.

Между напряжением на элементе, током и сопротивлением элемента существует соотношение:

$$r = \frac{u}{i}, \quad (1.2)$$

известное как **закон Ома**, экспериментально установленный немецким ученым Омом в 1826 г. Величина сопротивления измеряется в омах (Ом): $[Ом] = [В/А]$.

Сопротивление всегда положительно, т.е. направления тока через сопротивление и напряжения на нем совпадают.

Величина, обратная сопротивлению $g = \frac{1}{r}$, называется проводимостью.

Измеряется проводимость в сименсах (См): $[См] = [А/В]$.

Мгновенная мощность, выделяемая на сопротивлении, равна произведению мгновенных значений тока и напряжения:

$$p_r = u \cdot i = i^2 \cdot r = u^2 \cdot g,$$

т.е.

$$r = \frac{p_r}{i^2} = \frac{u^2}{p_r}.$$

Электрическая энергия, поглощаемая сопротивлением, равна:

$$W_r = \int_{t_1}^{t_2} (u \cdot i) dt = r \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt = \frac{1}{r} \int_{t_1}^{t_2} u^2 dt.$$

Если ток постоянный ($i = I = \text{const}$), то

$$W_r = I^2 \cdot r \cdot t.$$

Значение параметра r в общем случае зависит от величины протекающего

тока. Зависимость напряжения на сопротивлении от протекающего через него тока называется **вольтамперной характеристикой (ВАХ)**, которая в общем случае нелинейна. В частном случае, когда значение r не зависит от величины тока, вольтамперная характеристика сопротивления линейна, и для него выполняется закон Ома. Пример линейной (1) и нелинейной (2) вольтамперных характеристик приведен на рис. 1.3. Очевидно, величина сопротивления r пропорциональна тангенсу наклона линейной вольтамперной характеристики к оси тока в точке А:

$$r = \frac{u}{i} = \frac{m_u \cdot AB}{m_i \cdot OB} = \frac{m_u}{m_i} \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

где m_u и m_i – масштабы напряжения и тока соответственно.

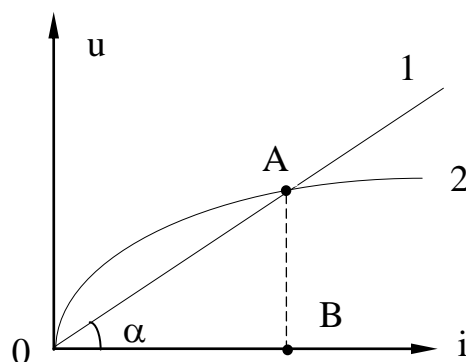


Рис 1.3. Вольтамперные характеристики сопротивлений: 1 – линейная; 2 – нелинейная

1.1.4.2 Емкость

Емкостью называется идеализированный элемент электрической цепи, приближенно заменяющий конденсатор, в котором накапливается энергия электрического поля. Буквенное обозначение емкости – C .

Величина емкости определяет, какой заряд q можно получить при заданном напряжении u :

$$q = C \cdot u \quad (1.3)$$

или

$$C = \frac{q}{u}.$$

Величина емкости измеряется в фарадах (Ф): $\Phi = \left[\frac{A \cdot c}{B} \right]$.

Заряд и напряжение всегда имеют одинаковый знак, поэтому емкость всегда положительна ($C > 0$).

Зависимость заряда на емкости от приложенного к ней напряжения называется **вольткулоновой характеристикой**. В общем случае эта зависимость нелинейна, следовательно, емкость C нелинейно зависит от приложенного напряжения. В частном случае, когда вольткулоновая характеристика прямолинейна, емкость C постоянна. На рис. 1.4 приведены линейная (1) и нелинейная (2) вольткулоновые характеристики.

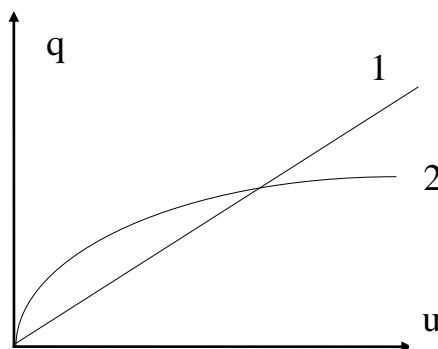


Рис 1.4. Вольткулоновые характеристики емкостей: 1 – линейная; 2 – нелинейная

При изменении напряжения, приложенного к емкости, в соответствии с (1.3) изменится и электрический заряд. Подставив (1.3) в (1.1), получаем:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_c}{dt}. \quad (1.4.)$$

Не рассматривая процессы с позиций теории электромагнитного поля, отметим только, что в проводниках, соединенных с емкостью, будет протекать ток, величина которого определяется в соответствии с (1.4).

На основании выражения (1.4) напряжение на емкости

$$u_c = \frac{1}{C} \cdot \int i dt,$$

или

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i dt,$$

где предполагается, что до момента времени t процесс мог длиться сколь угодно долго, поэтому нижний предел интегрирования принят равным $(-\infty)$. При $t = 0$ напряжение на емкости равно

$$u_c(0) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^0 i dt,$$

или

$$u_c(t) = u_c(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i dt. \quad (1.5)$$

Условное графическое обозначение емкости с положительными направлениями токов и напряжений приведено на рис. 1.5.

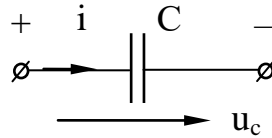


Рис. 1.5. Условное графическое обозначение емкости и положительные направления тока и напряжения

Мгновенная мощность, поступающая в емкость, равна:

$$p_c = u_c \cdot i = u_c \cdot C \frac{du_c}{dt},$$

откуда видно, что если $\frac{du_c}{dt} > 0$, то мгновенная мощность $p_c > 0$, т.е. емкость накапливает энергию (происходит заряд емкости), в противном случае происходит возврат энергии источнику питания (разряд емкости).

Энергия электрического поля в произвольный момент времени t определится по формуле:

$$W_C = \int_{-\infty}^t p_c dt = \int_0^{u(t)} C \cdot u(t) du = C \frac{u_c^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (1.6)$$

В выражении (1.6) предполагается, что при $t = (-\infty)$ напряжение на емкости C было равно нулю: $u_c(-\infty) = 0$.

1.1.4.3 Индуктивность

Если контур из проводника поместить в переменное магнитное поле, то согласно закону электромагнитной индукции (Фарадея – Максвелла) в нем наводится электродвижущая сила (ЭДС), равная:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.7)$$

где Φ – магнитный поток, пронизывающий контур.

Магнитный поток измеряется в веберах (Вб). Согласно выражению (1.7) $[Вб] = [В \cdot с]$.

Предположим, что контур представляет собой катушку индуктивности,

т.е. состоит из нескольких витков, каждый из которых пронизывается своим потоком Φ_i .

Из (1.7) имеем:

$$e = -\frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt} - \dots - \frac{d\Phi_n}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (1.7a)$$

где Ψ – потокосцепление, равное сумме всех потоков, пронизывающих все отдельные витки контура.

Когда все витки пронизываются одним и тем же потоком,

$$\Psi = w \cdot \Phi,$$

где w – число витков.

Если рассматривать изолированный контур с протекающим по нему током, то потокосцепление в этом случае носит название потокосцепления **самоиндукции** (соответственно ЭДС в (1.7) – ЭДС самоиндукции) и выражается как

$$\Psi = L \cdot i. \quad (1.8)$$

Коэффициент пропорциональности L между током и потокосцеплением называется индуктивностью самоиндукции или просто **индуктивностью**. В общем случае под индуктивностью будем подразумевать идеализированный элемент электрической цепи, приближающийся по своим свойствам к индуктивной катушке, которая способна накапливать энергию магнитного поля.

Измеряется индуктивность в генри (Гн): $[\text{Гн}] = \left[\frac{\text{В}}{\text{А} \cdot \text{с}} \right]$. Потокосцепление

и ток имеют одинаковый знак, т.е. индуктивность всегда положительна ($L > 0$).

Зависимость потокосцепления от тока в общем случае нелинейная, и параметр L зависит от тока. Зависимость потокосцепления от тока называется **вебер-амперной характеристикой**. В том случае, когда вебер-амперная характеристика линейна, индуктивность постоянна. На рис. 1.6 показаны вебер-амперные характеристики линейной (1) и нелинейной (2) индуктивностей.

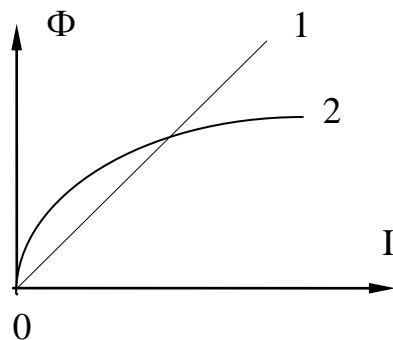


Рис. 1.6. Вебер-амперные характеристики
линейной (1) и нелинейной (2) индуктивностей

Условное графическое изображение индуктивности с указанием выбранных положительных направлений тока и ЭДС самоиндукции приведено на рис. 1.7. ЭДС самоиндукции и ток направлены в одну сторону, что учитывается знаком минус в уравнении (1.7).

Если же опустить этот знак, то направление ЭДС самоиндукции следует изменить на противоположное.

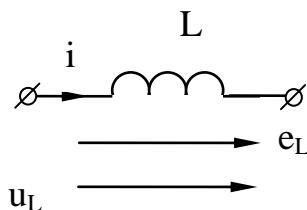


Рис. 1.7. Условное графическое обозначение
индуктивности, положительные направления тока,
ЭДС самоиндукции и напряжения

Для линейной индуктивности уравнение (1.7) примет вид:

$$e_L = -L \frac{di}{dt}. \quad (1.9)$$

ЭДС самоиндукции e_L компенсируется приложенным к индуктивности напряжением:

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}. \quad (1.10)$$

Из (1.10) имеем:

$$i = \frac{1}{L} \int u_L dt,$$

или

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt.$$

Нижний предел интегрирования, также как и для емкости, принят равным $-\infty$, так как до рассматриваемого момента времени t процесс мог длиться сколь угодно долго. При $t = 0$ ток в индуктивности равен

$$i(0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L dt,$$

следовательно,

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt. \quad (1.11)$$

Мгновенная мощность, поступающая в индуктивность, равна произведению мгновенных значений тока и напряжения:

$$p_L = i \cdot u_L = i \cdot L \frac{di}{dt}. \quad (1.12)$$

Из (1.12) следует, что эта мощность может быть как положительной (при совпадении знаков тока и его производной), т.е. потребляемой индуктивностью, так и отрицательной (при несовпадении знаков тока и его производной), когда энергия возвращается во внешнюю цепь.

Энергия магнитного поля в произвольный момент времени t определяется по формуле:

$$w_L = \int_{-\infty}^t p_L dt = \int_{-\infty}^{i(t)} L \cdot i(t) di = \frac{L \cdot i^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}. \quad (1.13)$$

Здесь учтено, что при $t = (-\infty)$ ток в индуктивности $i(-\infty) = 0$.

Если часть магнитного потока, связанного с индуктивным элементом L_1 , связана одновременно и с другим индуктивным элементом L_2 , то эти два элемента, кроме параметров L_1 и L_2 , обладают параметром M , называемым **взаимной индуктивностью**, которая равна отношению потокосцепления взаимной индукции одного из элементов к величине тока в другом элементе:

$$M = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}, \quad (1.14)$$

где Ψ_{12} – потокосцепление первого элемента, обусловленное током второго элемента; Ψ_{21} – потокосцепление второго элемента, обусловленное током первого элемента.

Если взаимная индуктивность M линейна, то в обоих элементах наводят-

ся ЭДС взаимной индукции, равные:

$$\begin{aligned} e_{1M} &= -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M \cdot \frac{di_2}{dt}, \\ e_{2M} &= -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \cdot \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

M также, как и L , измеряется в генри (Гн). Однако, в отличие от L , взаимная индуктивность может быть величиной как положительной, так и отрицательной.

Взаимная индуктивность не является самостоятельным элементом цепи, а только выражает магнитную связь между индуктивными элементами.

Взаимосвязи между напряжениями и токами, а также энергетические характеристики линейных идеальных пассивных элементов представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Элементы и их изображения	Характеристики		Мощность и энергия
<p>Резистивный</p> 	$u_R = R \cdot i_R$	$i_R = u_R / R$	$p_R = R \cdot i_R^2 = G \cdot u_R^2$
<p>Индуктивный</p> 	$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$	$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt$	$W_L = L \cdot i_L^2 / 2$
<p>Емкостный</p> 	$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$	$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$	$W_C = C \cdot u_C^2 / 2$

1.1.5 ИСТОЧНИК ЭДС И ИСТОЧНИК ТОКА

Процессы, происходящие в реальных источниках электрической энергии, различаются многообразием и описываются достаточно сложными уравнениями. Однако анализ таких схем может быть существенно упрощен, если источники электрической энергии заменить идеальными, а потери мощности и напряжения в них учесть пассивными элементами, включенными последовательно или параллельно с источниками. Естественно, что при такой замене рассчитанные токи и напряжения должны с требуемой степенью точности отра-

жать процессы, происходящие в реальных источниках энергии.

Идеальный источник ЭДС представляет собой активный элемент с двумя выводами, напряжение на которых не зависит от сопротивления внешней цепи, т.е. не зависит от тока, проходящего через источник. Изображение идеального источника ЭДС приведено на рис. 1.8, а. Предполагается, что внутри такого источника пассивные элементы (r , L , C) отсутствуют, и поэтому при протекании тока через источник на нем не происходит падения напряжения. **Внутреннее сопротивление идеального источника ЭДС равно нулю.**

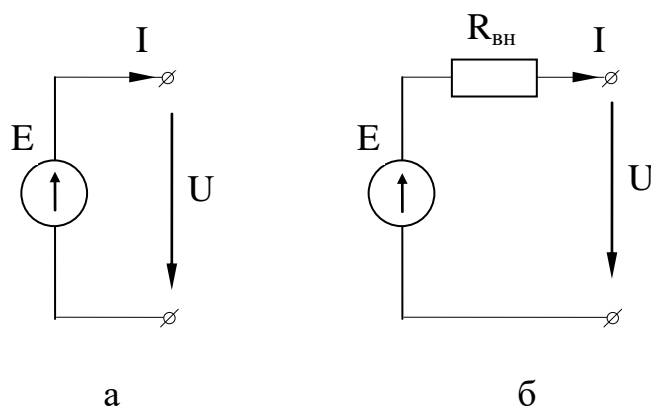


Рис. 1.8. Условные обозначения идеального (а) и реального (б) источников ЭДС

В отличие от пассивных элементов, где ток протекает от большего потенциала к меньшему, в источнике ЭДС этот процесс обратный вследствие действия внутренних сил источника. Работа, затрачиваемая на перемещение единичного заряда от вывода «–» к выводу «+», называется **электродвижущей силой** источника и обозначается в общем случае строчной буквой e , а постоянная ЭДС – прописной E . Соответственно, напряжение на выводах источника ЭДС $u = -e$, т.е. **положительное направление напряжения противоположно положительному направлению ЭДС.**

Идеальных источников ЭДС в природе не существует. Нет такого источника, короткое замыкание которого (соединение выводов проводником с нулевым сопротивлением) приводит к бесконечно большим токам $i_{кз} = \frac{e}{0}$.

В любом источнике существует внутреннее сопротивление, падение напряжения на котором при коротком замыкании уравнивает ЭДС источника, поэтому ток короткого замыкания имеет конечную величину.

Схема замещения источника ЭДС конечной мощности (реального источника ЭДС) состоит из идеального источника ЭДС и включенного последовательно с ним пассивного элемента (рис. 1.8, б), характеризующего внутренние параметры источника и ограничивающего мощность, отдаваемую во внешнюю цепь. В цепях постоянного тока это, как правило, резистор (на рис. 1.8, б обозначен как $R_{вн}$), сопротивление которого много меньше сопротивления внешней цепи. В некоторых случаях (в зависимости от требуемой точности расчета) его сопротивлением можно пренебречь. Вольтамперные характеристики идеального (1) и реального (2) источников ЭДС постоянного тока изображены на рис. 1.9, а.

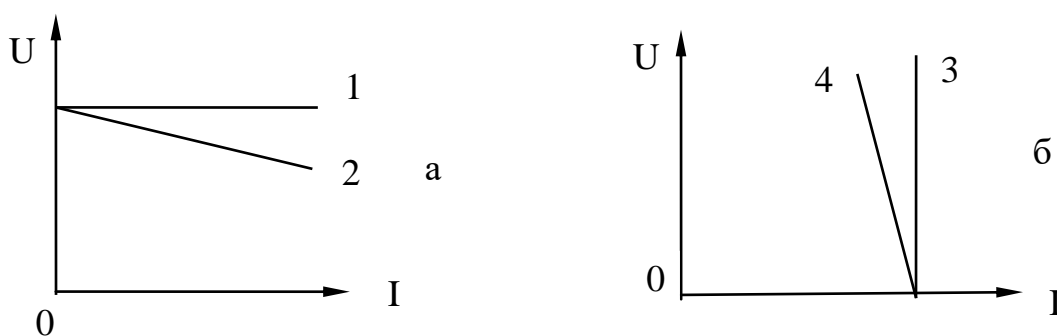


Рис. 1.9. Вольтамперные характеристики источников ЭДС (а) и тока (б): 1,3 – идеальных; 2,4 – реальных

Источник тока представляет собой активный элемент, ток которого практически не зависит от напряжения на его выводах. Это может быть в том случае, если внутреннее сопротивление источника тока несоизмеримо больше сопротивления внешней цепи. Целесообразно ввести понятие идеального источника тока. Очевидно, что *у идеального источника тока внутреннее сопротивление равно бесконечности*.

Условное обозначение идеального источника тока приведено на рис. 1.10, а. Двойная стрелка и знаки «+» и «-» указывают положительное направление протекания тока источника и его полярность.

Если к идеальному источнику тока подключить сопротивление и увеличивать его до бесконечности, то напряжение на его выводах и соответственно мощность будут неограниченно возрастать. Поэтому идеальный источник тока, также как и идеальный источник ЭДС, рассматривается как источник бесконечной мощности.

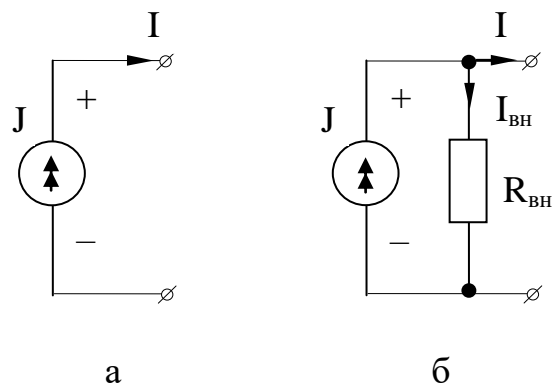


Рис. 1.10. Условные обозначения идеального (а) и реального (б) источников тока

Источники тока конечной мощности (реальные) изображаются в виде параллельного соединения идеального источника тока и пассивного элемента (рис. 1.10, б). Пассивный элемент, как и в схеме замещения реального источника ЭДС, характеризует внутренние параметры источника тока и ограничивает мощность, отдаваемую во внешнюю цепь. Ток реального источника меньше тока идеального на величину тока $I_{\text{вн}}$, протекающего по внутреннему сопротивлению $R_{\text{вн}}$.

Вольтамперные характеристики идеального и реального источников постоянного тока изображены на рис. 1.9, б.

1.1.6 ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Электрическая цепь, в которой величины сопротивлений, индуктивностей и емкостей не зависят от величин протекающих токов, приложенных к ним напряжений и их направлений, называется **линейной**. В таких цепях токи и напряжения на каждом элементе связаны алгебраическими, дифференциальными или интегральными уравнениями первого порядка. Для сопротивлений эта зависимость выражается законом Ома (1.2), для емкостей и индуктивностей – дифференциальными и интегральными уравнениями первого порядка (1.4) и (1.5), (1.10) и (1.11).

В общем случае идеальных линейных электрических цепей в природе не существует. При изменении токов и напряжений в достаточно широких пределах в любом элементе проявляются нелинейные эффекты. Например, сопротивления резисторов изменяются при нагревании протекающим током, магнитопроводы индуктивных катушек насыщаются, проявляется гистерезис, коро-

нирование проводников при высоких напряжениях и т. д. Поэтому линейная модель элемента применима только в определенном диапазоне изменений токов и напряжений, когда погрешность расчетов не превышает заданную.

Устройство рассматривается как линейное, если при заданных ограниченных пределах значений напряжения и тока закон линейности сохраняется с достаточной для практики степенью точности.

Расчеты линейных цепей менее трудоемки, чем расчеты нелинейных. Поэтому, если линейные характеристики элементов достаточно близко отражают реальные процессы, цепь рассматривается как линейная.

1.1.7 ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ СХЕМА

Электрическая схема представляет собой графическое изображение электрической цепи. Она отражает, каким образом соединены активные и пассивные элементы электрической цепи между собой.

Элементы электрической цепи, соединенные последовательно, образуют **ветвь** (рис.1.11). **Во всех элементах ветви протекает один и тот же ток в одном направлении.** Если состав ветви неизвестен, ее изображают прямоугольником.

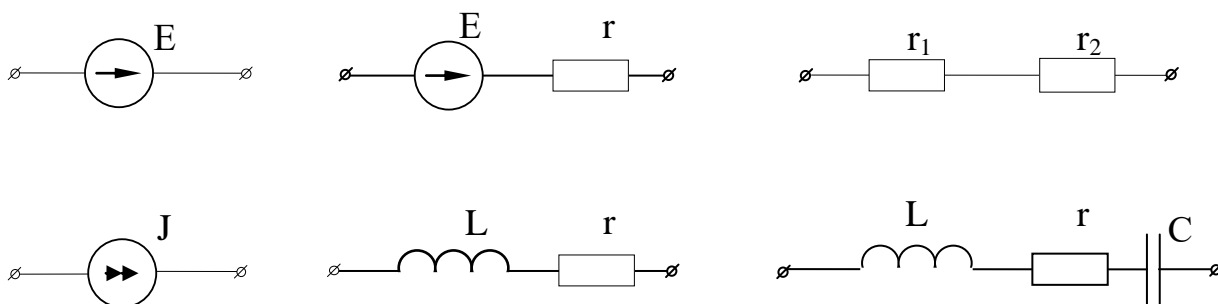


Рис. 1.11. Примеры ветвей электрической схемы

Место соединения трех и более ветвей называется **узлом**. Узлы на электрических схемах принято обозначать буквами либо цифрами.

В некоторых случаях для удобства чтения схем узел, в котором сходятся более трех ветвей, изображают несколькими узлами, соединенными между собой проводниками с нулевым сопротивлением, как это показано на рис. 1.12, б. Поэтому схемы, изображенные на рис. 1.12, а, б, эквивалентны.

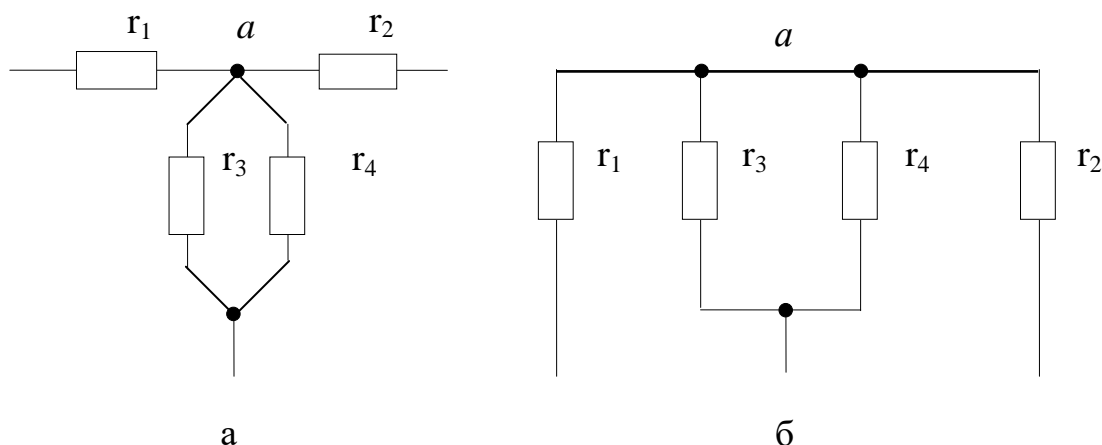


Рис. 1.12. Изображение части электрической схемы

Ветви, присоединенные к одной и той же паре узлов, называются **параллельными** (ветви с сопротивлениями r_3 и r_4 на рис. 1.12).

На рис. 1.13. изображена схема некоторой цепи, содержащей четыре узла (a, b, c, d) и шесть ветвей.

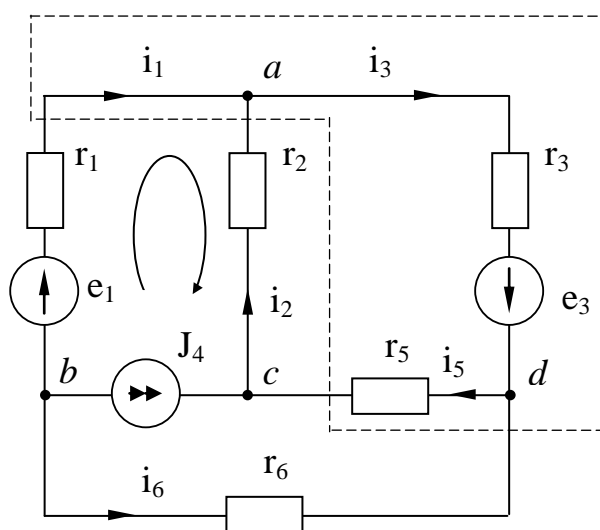


Рис. 1.13. Пример схемы электрической цепи

Любой замкнутый путь, проходящий по нескольким неповторяющимся ветвям, называется **контуром**. На рис. 1.13 стрелкой указано направление обхода одного из контуров электрической цепи. Схемы бывают **одноконтурные** и **многоконтурные**.

Если схема изображает электрическую цепь постоянного тока, то из пассивных элементов в ней присутствуют только сопротивления. Индуктивность следует заменить ветвью с нулевым сопротивлением, так как согласно (1.10)

напряжение на индуктивности равно нулю, следовательно, ее сопротивление

$$r_L = \frac{0}{I} = 0.$$

Емкость для постоянного тока является разрывом ветви (ток, проходящий через емкость, согласно (1.4) равен нулю, следовательно, $r_c = \frac{U}{0} = \infty$). Поэтому ветви, в которых есть емкости, из схемы должны быть исключены. Например, схему, изображенную на рис. 1.14, а, в которой действуют только источники энергии постоянного тока, для расчета следует преобразовать в схему рис. 1.14, б.

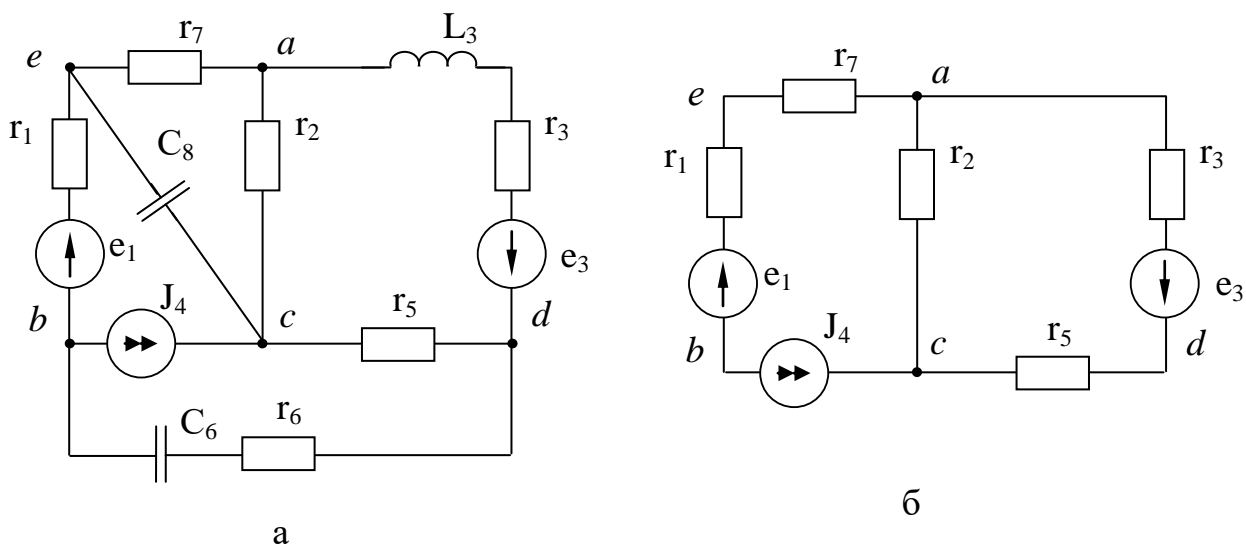


Рис. 1.14. Исходная схема (а) и расчетная схема для постоянного тока (б)

1.1.8 ВОЛЬТАМПЕРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА УЧАСТКА ЦЕПИ С ИСТОЧНИКОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 1.15, а, где последовательно соединены идеальный источник ЭДС и сопротивление. Такая схема представляет, как показано выше, источник ЭДС конечной мощности. Ток в схеме

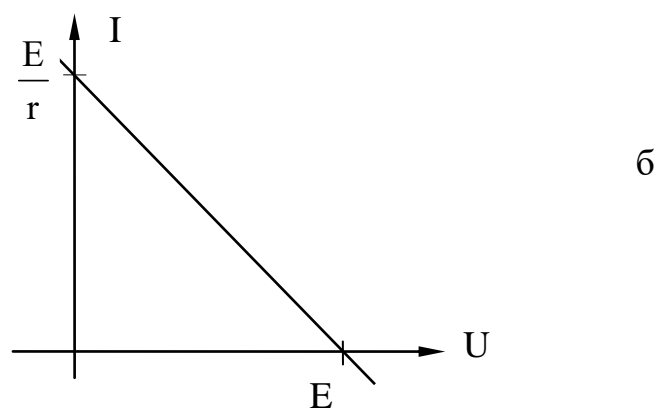
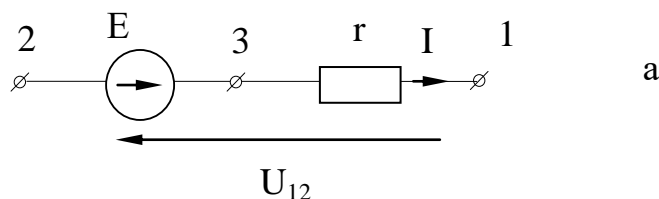


Рис. 1.15. Последовательное соединение идеального источника ЭДС и сопротивления (а) и вольтамперная характеристика цепи (б)

направлен согласно с ЭДС.

Определим напряжение между узлами U_{12} . Напряжение U_{12} , очевидно, будет складываться из напряжений U_{13} и U_{32} :

$$U_{12} = U_{13} + U_{32}.$$

Так как ток на участке 3–1 протекает от большего потенциала к меньшему, то $U_{13} = -U_{31} = -I \cdot r$. Напряжение на участке 3–2 равно ЭДС (см. рис. 1.8). Таким образом:

$$U_{12} = E - I \cdot r. \quad (1.16)$$

В соответствии с этим уравнением строится вольтамперная характеристика, которая часто называется **внешней характеристикой** источника ЭДС. Положив $U_{12} = 0$, имеем на оси I : $I = E/r$. Вторую точку характеристики на оси U получим, если примем $I = 0$. Тогда $U_{12} = E$. Так как уравнение (1.16) линейно, то, соединив две точки на осях I и U , получим искомую вольтамперную характеристику (рис. 1.15, б).

Аналогичную характеристику можно построить для источника тока конечной мощности, схема которого изображена на рис. 1.16, а.

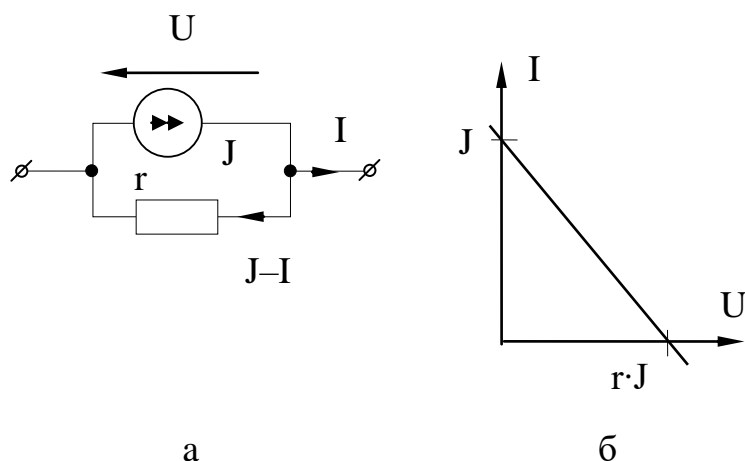


Рис. 1.16. Параллельное соединение идеального источника тока и сопротивления (а) и вольтамперная характеристика цепи (б)

Напряжение на источнике тока, очевидно, равно произведению тока, протекающего через сопротивление r , на его величину: $U = (J - I) \cdot r$.

Две точки характеристики получим, положив $U = 0$ и $I = 0$. Тогда на оси напряжений при $I = 0$ получим $U = J \cdot r$, а на оси токов $J = I$ при $U = 0$. Искомая вольтамперная характеристика приведена на рис. 1.16, б.

1.1.9 ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Основополагающими законами в теории электрических цепей в общем случае являются два закона Кирхгофа. Для линейных цепей справедлив также закон Ома. Все методы расчета, определяющие распределение токов и напряжений, основываются на законах Кирхгофа.

1.1.9.1 Первый закон Кирхгофа

Первый закон Кирхгофа формулируется в следующей редакции:

Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0. \quad (1.17)$$

Суммирование токов производится только для одного конкретного узла с учетом принятых положительных направлений.

Суть закона Кирхгофа не зависит от того, какое из направлений токов принимается за положительное – от узла или к узлу, но, на наш взгляд, более логично положительным считать направление втекающих в узел токов. Здесь и далее это положение примем за основу.

На основе изложенного составим уравнения по первому закону Кирхгофа для схемы, изображенной на рис. 1.13. Для узла a имеем:

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0.$$

Для узлов b , c и d соответственно:

$$-i_1 - J_4 - i_6 = 0 ;$$

$$-i_2 + J_4 + i_5 = 0 ;$$

$$i_3 - i_5 + i_6 = 0 .$$

Выделим пунктиром часть схемы на рис. 1.13. Запишем для этой части уравнения по первому закону Кирхгофа для всех узлов и найдем их сумму. В результате получим важное следствие из первого закона Кирхгофа – **алгебраическая сумма внешних токов по отношению к выделенной части электрической цепи равна нулю** (внутренние токи в полученную сумму входят дважды: один раз положительными, второй – отрицательными). Для выделенной пунктиром части схемы на рис. 1.13 справедливо следующее уравнение:

$$i_1 + i_2 - i_5 + i_6 = 0 ,$$

так как токи i_1 , i_2 и i_6 втекают в схему, а ток i_5 вытекает.

1.1.9.2 Второй закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма ЭДС в любом замкнутом контуре электрической цепи равна алгебраической сумме падений напряжений на элементах этого контура. Такова формулировка **второго закона Кирхгофа**.

$$\sum_1^n e_k = \sum_1^m u_k, \quad (1.18)$$

где e_k – k -я ЭДС в рассматриваемом контуре;

n – число ЭДС в контуре;

u_k – напряжение на пассивном k -м элементе в этом контуре;

m – число элементов в контуре.

ЭДС и напряжение принимаются положительными, если их направление совпадает с направлением обхода контура и отрицательными, если оно проти-

воположно. Например, для внешнего контура схемы рис 1.13, образованного ЭДС e_1 и e_3 и сопротивлениями r_1 , r_3 и r_6 , при обходе его по часовой стрелке имеем:

$$e_1 + e_3 = i_1 \cdot r_1 + i_3 \cdot r_3 - i_6 \cdot r_6.$$

Уравнение (1.18) можно переписать как:

$$\sum_1^{m+n} u_k = 0, \quad (1.19)$$

где u_k – напряжение на элементе k рассматриваемого контура, число которых (элементов) равно $n + m$ – сумме источников ЭДС и пассивных элементов.

Для того же контура согласно выражению (1.19) имеем:

$$-e_1 + i_1 \cdot r_1 + i_3 \cdot r_3 - e_3 - i_6 \cdot r_6 = 0.$$

Уравнения (1.17), (1.18) и (1.19) справедливы для любых электрических цепей.

1.1.10 ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ДИАГРАММА

Распределение потенциалов вдоль участка цепи или замкнутого контура называется **потенциальной диаграммой**. Для её построения необходимо потенциал какой-либо точки схемы принять за опорный. Обычно потенциал одного из узлов принимают равным нулю. При этом считается, что данный узел заземлен (потенциал поверхности земли принимается за нулевой). Заземление только одного из узлов схемы не приведет к изменению токов в схеме, так как не образуется дополнительных контуров. Нельзя в схеме заземлять два и более узлов, так как через заземления образуются новые контуры, т. е. изменяется схема. *Заземлять в схеме можно только один узел*, если нет другого заземления.

Построение потенциальной диаграммы начинается с того, что от точки, принятой за начало, на оси абсцисс откладывается суммарное сопротивление рассматриваемой ветви или контура. На оси ординат отмечается потенциал начальной точки – точки, с которой начинается обход контура. Затем, в соответствии с выбранным направлением обхода контура, откладываются потенциалы точек, следующих за начальной. При этом по оси абсцисс откладывается суммарное сопротивление. Пример построения диаграммы приведен при решении задачи **П.1.8**.

1.1.11 ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Энергия, выделяемая на сопротивлениях электрической цепи, генерируется источниками ЭДС и токов. Поэтому для любой цепи всегда справедливо соотношение

$$\sum_1^n (u_{r_k} \cdot i_{r_k} \cdot t) = \sum_1^m (u_p \cdot i_p \cdot t),$$

или

$$\sum_1^n (i_{r_k}^2 \cdot R_k) = \sum_1^m (u_p \cdot i_p), \quad (1.20)$$

где n – число сопротивлений в цепи; m – число источников электрической энергии; i_{r_k} – ток в k -м сопротивлении; u_p – напряжение p -го источника; i_p – ток p -го источника.

Если в схеме присутствуют только источники ЭДС, то уравнение (1.20) будет иметь вид:

$$\sum_1^n (i_{r_k}^2 \cdot R_k) = \sum_1^m (e_{p_k} \cdot i_p), \quad (1.21)$$

где e_p – ЭДС p -го источника.

При наличии в схеме, кроме источников ЭДС, еще и источников тока

$$\sum_1^n (i_{r_k}^2 \cdot R_k) = \sum_1^m (e_p \cdot i_p) + \sum_1^q (u_s \cdot J_s), \quad (1.22)$$

где q – количество источников тока; u_s, J_s – соответственно напряжение на s -м источнике и его ток.

Если в уравнениях (1.20) – (1.22) направления напряжений и токов источников совпадают, то мощность – величина положительная, в противном случае – отрицательная. Так, для схемы, представленной на рис. 1.13, при принятых положительных направлениях токов имеем:

$$e_1 \cdot i_1 + e_3 \cdot i_3 - J_4 \cdot u_{cb} = i_1^2 \cdot r_1 + i_2^2 \cdot r_2 + i_3^2 \cdot r_3 + i_5^2 \cdot r_5 + i_6^2 \cdot r_6.$$

1.1.12 МАКСИМАЛЬНАЯ МОЩНОСТЬ РЕАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА

Рассмотрим схему цепи на рис. 1.17, состоящую из источника ЭДС с внутренним сопротивлением $R_{вн}$ и нагрузки R (реальный источник тока можно

заменить эквивалентным с ЭДС).

Ток в цепи равен

$$I = \frac{E}{R_{\text{вн}} + R}, \quad (1.23)$$

а мощность, выделяемая на сопротивлении нагрузки R ,

$$P_{\text{н}} = I^2 R = \frac{E^2}{(R_{\text{вн}} + R)^2} \cdot R. \quad (1.24)$$

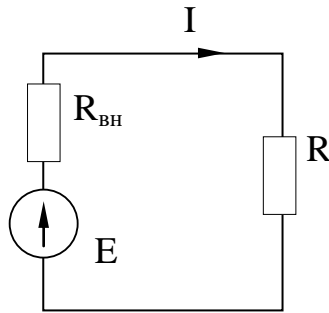


Рис. 1.17. Схема для определения максимальной мощности реального источника

Определим, при каком соотношении между сопротивлениями нагрузки R и внутренним $R_{\text{вн}}$ в нагрузке будет выделяться максимальная мощность. С этой целью возьмем первую производную от $P_{\text{н}}$ по R и приравняем её к нулю:

$$\frac{dP_{\text{н}}}{dR} = \frac{(R_{\text{вн}} + R)^2 - 2R(R_{\text{вн}} + R)}{(R_{\text{вн}} + R)^4} \cdot E^2 = 0, \quad (1.25)$$

или

$$(R_{\text{вн}} + R) \cdot (R_{\text{вн}} - R) = 0,$$

откуда следует

$$R = R_{\text{вн}}. \quad (1.26)$$

Вторая производная

$$\frac{d^2 P_{\text{н}}}{dR^2} = \frac{-2R(R_{\text{вн}} + R)^4 + 2R(R_{\text{вн}} + R)^4 - (R_{\text{вн}} + R)^5}{(R_{\text{вн}} + R)^8} < 0,$$

что свидетельствует о том, что при выполнении условия (1.26) действительно имеет место максимум мощности.

Максимальная мощность, отдаваемая источником ЭДС, согласно (1.21) с учетом (1.26) и (1.24), равна

$$P_{\max} = E \cdot \frac{E}{2R_{\text{вн}}} = \frac{E^2}{2R_{\text{вн}}},$$

следовательно, максимальное значение коэффициента полезного действия цепи равно 0,5.

Примеры и упражнения

П.1.1. Задан контур, входящий в цепь постоянного тока (рис. 1.18, а). Выразить напряжение U_{ab} через величины $E_1, R_1, I_1, E_2, I_2, R_2$.

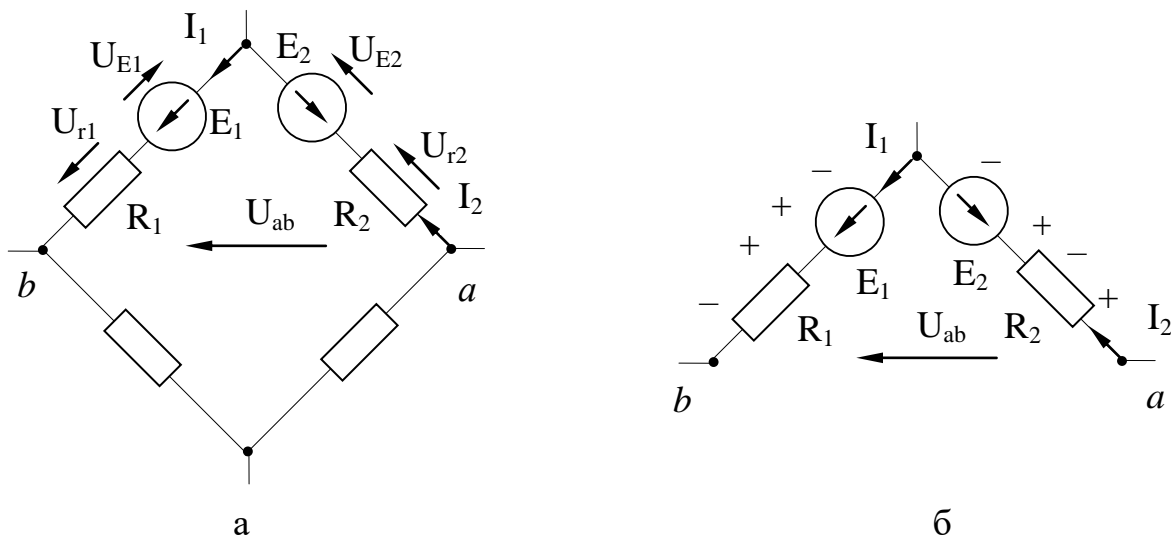


Рис. 1.18

Решение.

Обход участка цепи начинаем от узла a .

Первый способ. Положительное направление напряжения на сопротивлении совпадает с положительным направлением тока, на ЭДС – противоположно ее направлению (указано стрелками). Суммируя напряжения на элементах с учетом их направлений, получаем:

$$U_{ab} = I_2 \cdot R_2 + E_2 - E_1 + I_1 \cdot R_1.$$

Второй способ. Ток на сопротивлении протекает от «+» к «-». Стрелка ЭДС указывает в направлении «+». Положительное направление напряжения – от «+» к «-» (рис. 1.18, б). Если при обходе участка схемы первый вывод элемента имеет знак «+» (положительное направление напряжения совпадает с направлением обхода участка), значит, напряжение суммируется со знаком «+», если первый вывод элемента имеет знак «-», напряжение на элементе

суммируется со знаком «-». Таким образом,

$$U_{ab} = I_2 \cdot R_2 + E_2 - E_1 + I_1 \cdot R_1.$$

П.1.2. Задан контур, входящий в состав сложной цепи (рис 1.19). Составить для него уравнение по второму закону Кирхгофа.

(Используйте способы, изложенные в задаче П.1.1.)

П.1.3. На рис. 1.20 показана часть сложной цепи. Задано: $I_1 = 3$ А; $I_2 = 2,4$ А; $E_1 = 70$ В; $E_2 = 20$ В; $R_1 = 8$ Ом; $R_2 = 5$ Ом. Найти напряжение U_{ab} .

Ответ: $U_{ab} = 86$ В.

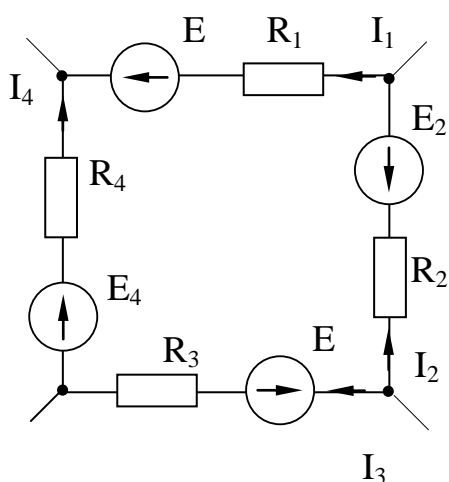


Рис. 1.19

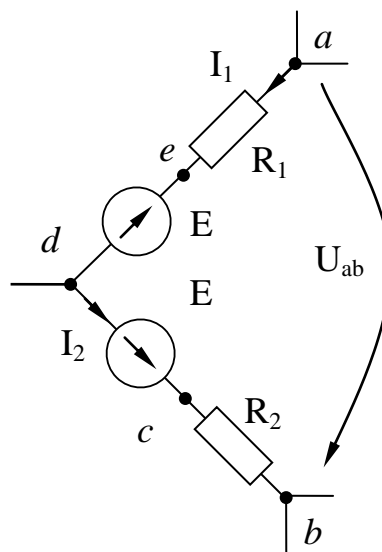


Рис. 1.20

П.1.4. На рис. 1.21 показана часть сложной цепи. Составить уравнения согласно законам Кирхгофа и найти абсолютные значения токов в ветвях, если $E_1 = 100$ В; $E_2 = 130$ В; $I = 8$ А; $R_1 = 3$ Ом; $R_2 = 5$ Ом; $U_{ca} = 70$ В.

Ответ: $I_1 = 0$; $I_2 = 8$ А.

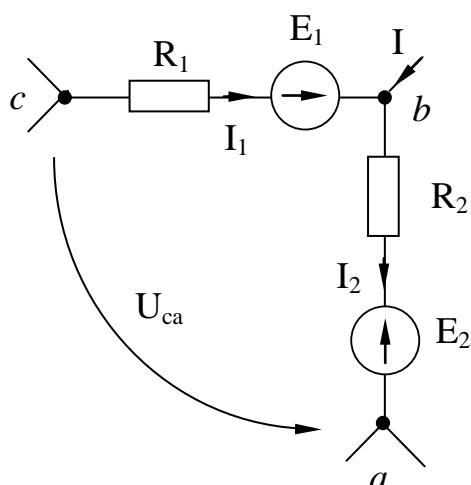


Рис. 1.21

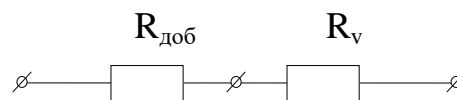


Рис. 1.22

П.1.5. Имеется вольтметр постоянного тока с пределом измерения 50 В и внутренним сопротивлением $R_V = 800 \text{ Ом}$ (рис. 1.22). Какое добавочное сопротивление $R_{\text{доб}}$ нужно подключить к прибору, чтобы им можно было измерять напряжение до 600 В?

Ответ: $R_{\text{доб}} = 8800 \text{ Ом}$.

П.1.6. Амперметр магнитоэлектрической системы с пределом измерения 1,0 А имеет внутреннее сопротивление 0,5 Ом (R_A) (рис. 1.23). Определите сопротивление шунта ($R_{\text{ш}}$) с тем, чтобы прибором можно было измерить токи до 5 А.

Ответ: $R_{\text{ш}} = 0,125 \text{ Ом}$.

П.1.7. Определить сопротивление R_2 , если $R_1 = 3 \text{ Ом}$, а показания амперметров указаны на рис. 1.24.

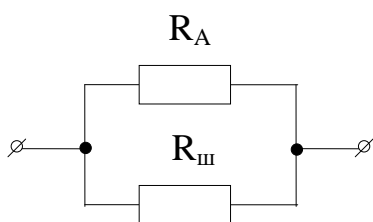


Рис. 1.23

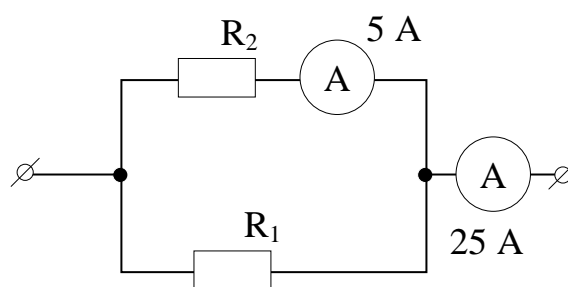


Рис. 1.24

Ответ: $R_2 = 12 \text{ Ом}$.

П.1.8. Для задачи **П.1.3** составить потенциальную диаграмму.

Решение. Зададимся потенциалом узла b $\phi_b = 0$. Сумма сопротивлений

между узлами a и b вдоль R_1 , E_1 , E_2 и R_2 равна 13 Ом. Запишем уравнение, выражающее напряжение U_{ab} :

$$U_{ab} = I_1 \cdot R_1 + E_1 - E_2 + I_2 \cdot R_2.$$

Потенциал точки c : $\varphi_c = I_2 \cdot R_2 = 2,4 \cdot 5 = 12$ В, а сопротивление между точками b и c равно 5 Ом.

Потенциал точки d : $\varphi_d = -E_2 + I_2 \cdot R_2 = -8$ В, а сопротивление между точками b и d не изменилось – 5 Ом.

Потенциал точки e : $\varphi_e = E_1 - E_2 + I_2 \cdot R_2 = 62$ В, а сопротивление осталось прежним.

Потенциал точки a равен напряжению $U_{ab} = 86$ В, а сопротивление равно сумме R_1 и R_2 . Потенциальная диаграмма изображена на рис. 1.25. По оси абсцисс откладывается сумма сопротивлений до искомой точки (c , d , e , a), по оси ординат – потенциал искомой точки. Так как сопротивления линейны, то точки соединяются отрезками прямых в той же последовательности, что и в схеме.

П.1.9. Для задачи **П.1.4** составить потенциальную диаграмму.

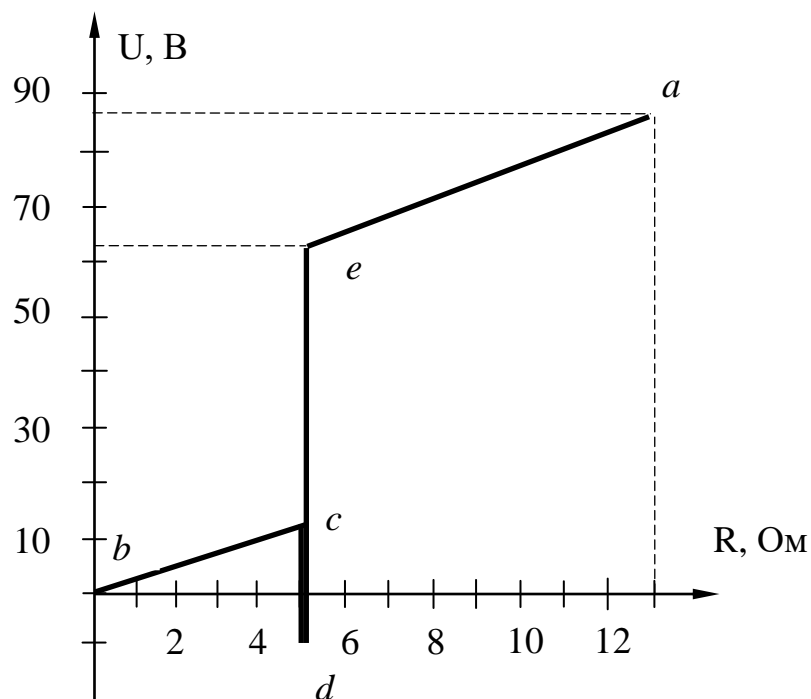


Рис. 1.25

П.1.10. Задана ветвь mn цепи постоянного тока (рис 1.26). Выразить ток I в этой ветви через E , U_0 и R .

Ответ: $I = \frac{-U_0 - E}{R}$.

П.1.11. На рис. 1.27 указаны параметры (E , R_0) источника электрической энергии и сопротивление нагрузки R .

При каком соотношении между R и R_0 в нагрузке будет выделяться максимальная мощность?

Ответ: $R_0 = R$

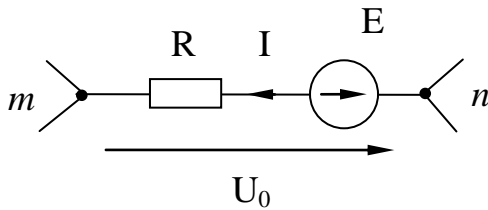


Рис. 1.26

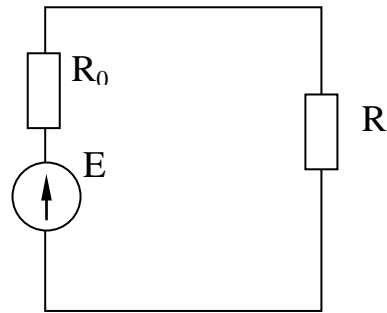
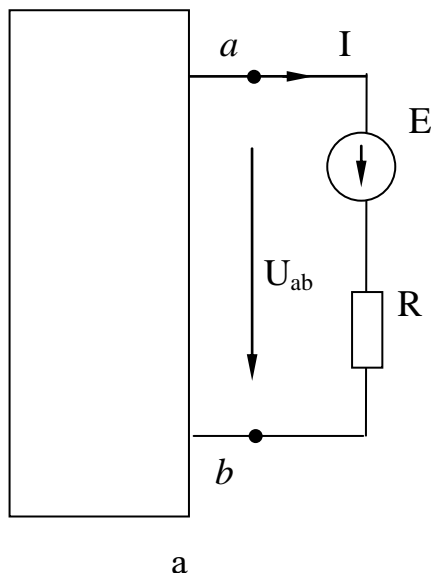


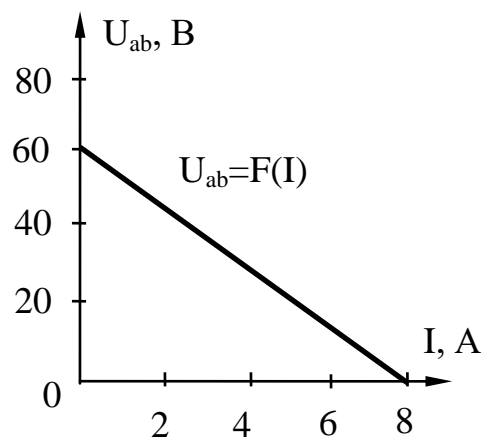
Рис. 1.27

П.1.12. Определить ток I в ветви ab (рис. 1.28, а), если известна вольтамперная характеристика $U_{ab} = F(I)$ активного двухполюсника (рис. 1.28, б), а также $R = 10$ Ом и $E = 50$ В.

Ответ: 6,28 А.



а



б

Рис. 1.28

П.1.13. Найти показание амперметра в цепи на рис. 1.29, если $U_{ab} = +107$ В; $U_{bc} = -60$ В; $R_1 = 7$ Ом; $R_2 = 8$ Ом; $E_1 = 100$ В; $E_2 = 70$ В.

Ответ: 0,25 A.

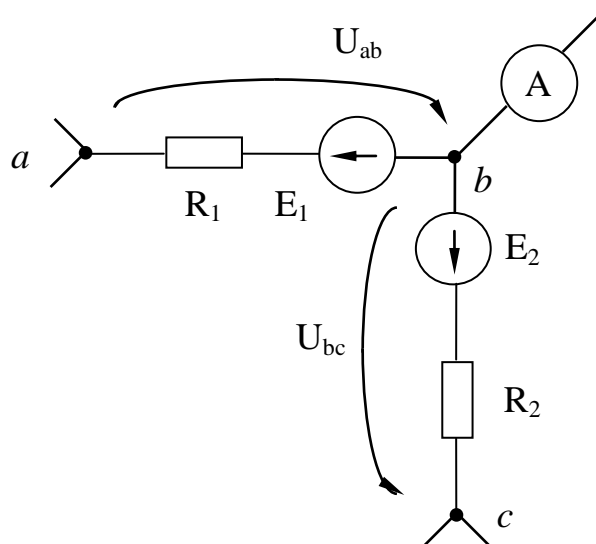


Рис. 1.29