
1.4 ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКАХ

1.4.1 СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ ЕГО ВЕЛИЧИНЫ

В линейной электрической цепи под действием периодических ЭДС с периодом T устанавливаются периодические токи и напряжения с тем же периодом. Величина $f = \frac{1}{T}$, обратная периоду, называется частотой (или циклической частотой) и измеряется в герцах (Гц).

Наибольший интерес представляют токи и напряжения, изменяющиеся во времени по синусоидальному закону, описываемые уравнениями вида

$$\begin{aligned} e &= E_m \sin(\omega t + \psi_e) ; \\ i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i) ; \\ u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u) . \end{aligned} \quad (1.59)$$

Интерес к цепям синусоидального тока объясняется тем, что при включении в цепь источников синусоидальных ЭДС или тока, токи и напряжения в цепи также синусоидальны, что следует из уравнений (1.2), (1.4), (1.10). Поэтому цепи синусоидального тока – наиболее распространенные электрические цепи.

Параметры цепей периодических несинусоидальных токов также можно описать уравнениями типа (4.1), используя разложение в ряд Фурье.

Величины e , i , u — мгновенные значения ЭДС, тока и напряжения (обозначаются строчными буквами), E_m , I_m , U_m — амплитудные значения тех же величин (обозначаются прописными буквами с индексом «m»), $\omega = 2\pi f$ — угловая частота; аргумент синуса носит название фазы, а слагаемые ψ_e , ψ_i , ψ_u — начальной фазы в момент времени $t = 0$.

В качестве иллюстрации на рис. 1.68 изображены графики двух синусоидальных функций – напряжения и тока:

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ В}; \\ i &= I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ А} . \end{aligned}$$

По оси абсцисс откладываются либо время, либо пропорциональная ему угловая величина ωt .

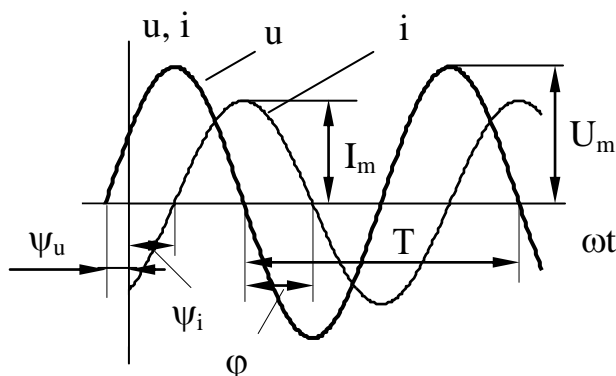


Рис.1.68 Временные диаграммы синусоидальных напряжения и тока

Разность фаз напряжения и тока $\varphi = \psi_u - \psi_i$ называют также углом сдвига тока по отношению к напряжению. При $\psi = 0$ ток и напряжение совпадают по фазе, при $\psi = \pi$ – противоположны по фазе (противофазны), при $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ они находятся в квадратуре. На рис. 1.68 приведены временные диаграммы для последнего случая.

1.4.2 ДЕЙСТВУЮЩИЕ И СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭДС, НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ

Действующее значение периодического тока равно такому значению постоянного тока I , при протекании которого в одинаковых по величине сопротивлении за период T выделяется такое же количество тепла, что и при протекании переменного тока за такой же промежуток времени.

Средняя за период мощность, пропорциональная количеству тепла, выделяющегося в цепи с сопротивлением r , равна:

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 r \, dt = r \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt = r \cdot I^2. \quad (1.60)$$

Введение понятия о действующем значении периодического тока, как среднего квадратичного значения за полный период, позволяет получить для средней мощности такое же по виду выражение, как и при постоянном токе.

Обозначаются действующие значения прописными буквами: E, U, I .

Из (1.60) имеем:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T e^2 dt}; \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2 dt}; \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt}. \quad (1.61)$$

Подставив в (1.61) выражение для синусоидальной функции e (1.59), получим:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} E_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_e) d(\omega t)} = \\ &= E_m \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\omega t + 2\psi_e)}{2} d(\omega t)} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (1.62)$$

поскольку $\int_0^{2\pi} \cos(2\omega t + 2\psi_0) d(\omega t) = 0$.

Аналогичные выражения могут быть получены для действующих значений напряжения и тока:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (1.63)$$

Действующее значение синусоидальной функции меньше ее амплитудного значения в $\sqrt{2}$ раз.

Среднее арифметическое значение синусоидальной функции за период равно нулю. Поэтому вводят понятие об ее среднем значении за положительный полупериод:

$$\begin{aligned} E_{\text{ср}} &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} E_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} \cdot E_m; \\ U_{\text{ср}} &= \frac{2}{\pi} \cdot U_m; \\ I_{\text{ср}} &= \frac{2}{\pi} \cdot I_m. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Средние значения синусоидальных функций обозначаются прописными буквами с индексом «ср».

Пример П.4.1. Определить амплитуду, угловую частоту, начальную фазу и действующее значение синусоидального тока, изменяющегося согласно выражению $i = 141 \sin\left(314 t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Решение.

Запишем каноническую форму гармонической функции $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$.

Амплитудное значение I_m – коэффициент при синусоидальной функции: $I_m = 141$ А. Угловая частота – коэффициент при переменной t : $\omega = 314$ рад/с, круговая частота связана с циклической соотношением $\omega = 2\pi f$, откуда $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2 \cdot 3,14} = 50$ Гц. Начальная фаза равна аргументу функции при $t = 0$, т.е. $\psi = \frac{\pi}{6}$. Действующее значение $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 100$ А.

1.4.3 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ЭДС, НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ С ПОМОЩЬЮ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВЕКТОРОВ. ВЕКТОРНЫЕ ДИАГРАММЫ

Синусоидальные ЭДС, напряжения или токи угловой частоты ω можно представить векторами, вращающимися с этой же скоростью, причем длины векторов равны амплитудному значению в соответствующем масштабе.

Сказанное иллюстрируется рис. 1.69, на котором изображен вектор длиной E_m , вращающийся против часовой стрелки с угловой частотой ω . Проекция вектора E_m на вертикальную ось равна мгновенному значению ЭДС e . Угол, отсчитываемый от горизонтальной оси, равен аргументу синуса функции:

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e).$$

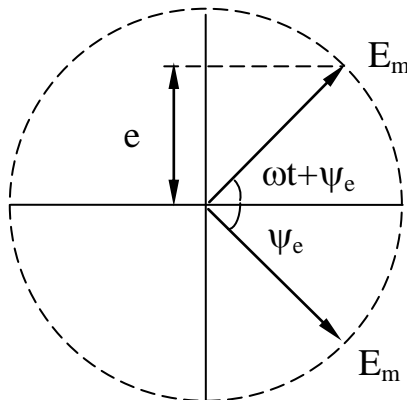


Рис.1.69. Представление мгновенной ЭДС вращающимся вектором E_m

На рис. 1.69 отмечен также угол ψ_e , под которым вектор E_m наклонен к горизонтальной оси в момент времени $t=0$. Введем понятие комплексной плоскости, где по горизонтальной оси (положительное направление оси обозначается +1) откладывается действительная часть комплексного числа, по вертикаль-

ной оси – мнимая часть этого числа (положительное направление оси обозначается $+j$).

Если вектор E_m рассматривать на комплексной плоскости, то его можно записать комплексной функцией (или комплексом) \dot{E}_m :

$$\dot{E}_m = E_m e^{j(\omega t + \psi_e)},$$

где E_m – модуль комплексного числа;

$\omega t + \psi_e$ – его аргумент;

$j = \sqrt{-1}$ – так называемая мнимая единица.

Комплексные числа обозначаются буквами с точкой наверху.

Для любого вектор \dot{A} справедлива формула Эйлера

$$\dot{A} = A \cos \lambda + jA \sin \lambda. \quad (1.65)$$

Эта формула носит название тригонометрической формы записи комплекса. Алгебраической формой записи называется запись вида

$$\dot{A} = A_1 + jA_2, \quad (1.66)$$

где $A_1 = A \cos \lambda$, $A_2 = A \sin \lambda$.

Наконец, показательная форма комплексного числа имеет вид

$$\dot{A} = A \cdot e^{j\lambda}. \quad (1.67)$$

Все три формы записи строго эквивалентны, поэтому

$$A_1 + jA_2 = A \cos \lambda + jA \sin \lambda = A \cdot e^{j\lambda}.$$

Из (4.6) следует, что

$$e^{j\lambda} = \cos \lambda + j \sin \lambda. \quad (1.68)$$

Модуль вектора $e^{j\lambda}$ равен единице, а аргумент – λ ; при $\lambda = \pi$ вектор $e^{j\lambda} = -1$. Так как $j = \sqrt{-1}$, то

$$j = \sqrt{e^{j\pi}} = e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad (1.69)$$

т.е. j – это единичный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением оси мнимых чисел, соответственно $(-j)$ – единичный вектор, совпадающий с ее отрицательным направлением.

Единичные векторы, направления которых совпадают с положительным или отрицательным направлениями осей действительных или мнимых чисел (рис. 1.70), записываются следующим образом:

$$e^{j0} = 1; e^{j\frac{\pi}{2}} = j; e^{j\pi} = -1; e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j. \quad (1.70)$$

Из записи комплексной функции

$$\dot{E}_m = E_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi_e)}$$

в тригонометрической форме

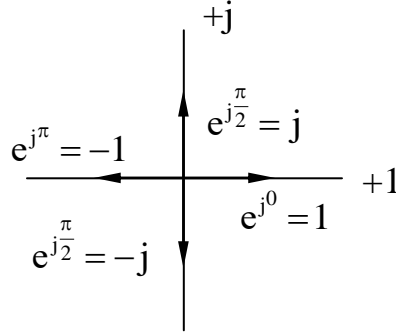


Рис.1.70. Расположение действительных и мнимых единичных векторов на комплексной плоскости

$$\dot{E}_m = E_m \cos(\omega t + \varphi_e) + jE_m \sin(\omega t + \varphi_e)$$

следует, что синусоидальную функцию можно рассматривать как проекцию вектора, вращающегося с угловой частотой ω , на ось мнимых чисел.

В общем виде для вектора A_m это записывается так:

$$A_m \sin(\omega t + \psi) = \text{Im}[A_m \cdot e^{j(\omega t + \psi)}] = \text{Im}(\dot{A}_m \cdot e^{j\omega t}), \quad (1.71)$$

где $\dot{A}_m = A_m \cdot e^{j\psi}$.

Символ (Im) обозначает, что должна быть взята только мнимая часть комплексной функции.

Действительную часть комплекса можно выразить в следующем виде:

$$A_m \cos(\omega t + \psi) = \text{Re}(\dot{A}_m e^{j\omega t}). \quad (1.72)$$

Комплексное число $A_m e^{j(\omega t + \psi)} = \dot{A}_m e^{j\omega t}$ мы будем рассматривать как изображение действительной синусоидальной функции

$$a = A_m \sin(\omega t + \psi).$$

Записать это можно так:

$$a = A_m \sin(\omega t + \psi) \Leftrightarrow A_m e^{j(\omega t + \psi)} = \dot{A}_m e^{j\omega t},$$

т.е. функции $A_m \sin(\omega t + \psi)$ соответствует изображение $\dot{A}_m e^{j\omega t}$. Векторы, вращающиеся на комплексной плоскости с угловой частотой ω , принято изображать в положении, соответствующем моменту времени $t = 0$. Тогда

$$A_m \sin(\omega \cdot 0 + \psi) \Leftrightarrow A_m e^{j\psi} = \dot{A}_m. \quad (1.73)$$

В практике расчетов чаще используют комплексы действующих значений синусоидальных величин, что требует уменьшения амплитудных значений в $\sqrt{2}$ раз.

Пример П.4.2. Ток в цепи изменяется по синусоидальному закону $i = 14,1 \sin\left(314 t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Найти комплекс действующего значения.

Ответ: $\dot{I} = \frac{14,1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{2}} = 10 e^{j\frac{\pi}{2}} = j10 \text{ А.}$

Пример П.4.3. Дан комплекс напряжения на участке цепи $\dot{U} = 50 e^{j45^\circ}$.

Написать формулу для определения мгновенных значений.

Решение. Амплитудное значение $U_m = 50 \cdot \sqrt{2} = 70,7 \text{ В}$, начальная фаза

$\psi_u = 45^\circ$, текущая фаза $\psi = \omega t + \frac{\pi}{4}$.

Таким образом,

$$u = 70,7 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Взаимная ориентация векторов, изображающих на комплексной плоскости несколько синусоидальных функций одной частоты, сохраняется неизменной для любого момента времени, поскольку векторы вращаются с одной и той же угловой частотой.

Изображение синусоидальных величин одной и той же частоты (токов, напряжений, ЭДС и т.п.) для одной и той же электрической цепи векторами, вращающимися на комплексной плоскости, называется векторной диаграммой. Напомним, что векторы принято изображать в положении, соответствующем моменту времени $t = 0$.

В качестве примера на рис. 1.71 изображена векторная диаграмма двух напряжений

$$u_1 = U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1);$$

$$u_2 = U_{2m} \sin(\omega t + \psi_2).$$

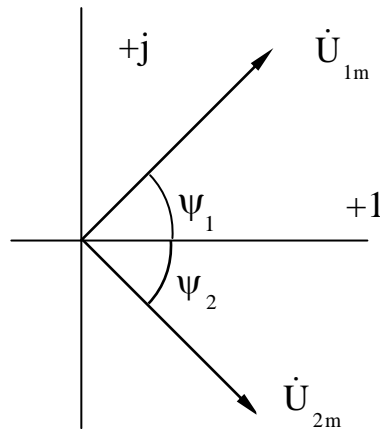


Рис. 1.71. Векторная диаграмма двух напряжений

Как будет показано ниже, векторные диаграммы дают не только наглядное представление об ЭДС, напряжениях и токах в цепи, но и упрощают в ряде случаев решение электротехнических задач.

Уравнения Кирхгофа справедливы для любого момента времени. Поэтому, если они справедливы для мнимых составляющих комплексов всех токов, напряжений и ЭДС, то они справедливы и для вещественных составляющих этих комплексов, а значит, и для самих комплексов.

Таким образом, чтобы определить синусоидальные напряжения и токи в цепи, достаточно определить комплексы этих напряжений и токов и по (1.71) перейти к оригиналам.

1.4.4 ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Чтобы решать задачи, используя комплексные изображения гармонических функций, необходимо уметь оперировать с самими комплексами.

Рассмотрим четыре арифметических действия с комплексными числами: сложение, вычитание, умножение и деление. При этом комплексные числа будем представлять в двух формах – алгебраической и показательной.

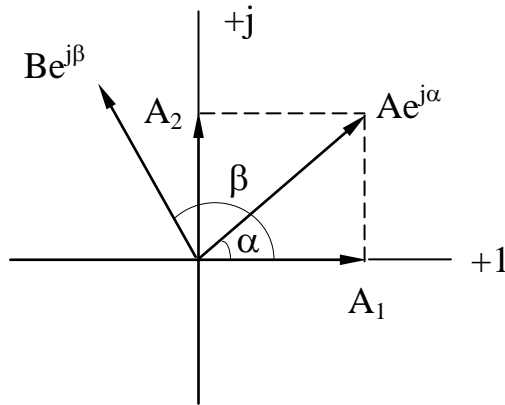


Рис.1.72. Связь между показательной и алгебраической формами записи комплекса

Связь между показательной и алгебраической формами следует из уравнений (1.66) и (1.67) и иллюстрируется рис. 1.72. Модуль комплексного числа \dot{A} , как гипотенуза прямоугольного треугольника, и его аргумент равны соответственно

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2}; \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{A_2}{A_1}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

При вычислении аргумента следует обращать внимание на то, в каком квадранте расположен вектор. Иначе при пользовании микрокалькулятором можно допустить ошибку, так как микрокалькулятор определяет для функции арктангенс только главное значение угла в интервале $\pm 90^\circ$, т.е. углы первого и четвертого квадрантов. Вектор же может иметь любой аргумент в диапазоне углов $\pm 180^\circ$. Например, правильная запись комплексного числа $\dot{B} = -50 + j86,6$ (рис. 1.72) в показательной форме $\dot{B} = 100e^{j120^\circ}$. Аргумент, найденный с помощью микрокалькулятора, равен -60° , и получается, что $\dot{B} = 100e^{-j60^\circ}$, что неверно. Если действительная часть комплексного числа отрицательна, то к значению аргумента, полученного на микрокалькуляторе, необходимо прибавить (или отнять от него) 180° с тем, чтобы полученное значение аргумента находилось в интервале $\pm 180^\circ$.

Действительная и мнимая части комплексного числа равны

$$A_1 = A \cdot \cos \alpha; \quad A_2 = A \cdot \sin \alpha. \quad (1.75)$$

Рассмотрим арифметические действия над комплексными числами в по-

казательной форме.

Сумма и разность двух векторов \dot{A} и \dot{B} определяются выражениями:

$$\begin{aligned}\dot{C} &= C e^{j\lambda} = \dot{A} \pm \dot{B} = A e^{j\alpha} \pm B e^{j\beta}; \\ C &= \sqrt{A^2 + B^2 \pm 2 \cdot AB \cdot \cos(\alpha \mp \beta)}; \\ \operatorname{tg} \lambda &= \frac{A \sin \alpha \pm B \sin \beta}{A \cos \alpha \pm B \cos \beta}.\end{aligned}\quad (1.76)$$

Произведение

$$\dot{C} = \dot{A} \cdot \dot{B} = A e^{j\alpha} \cdot B e^{j\beta} = AB \cdot e^{j(\alpha+\beta)}.\quad (1.77)$$

Отношение двух комплексов

$$\dot{C} = \frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \frac{A e^{j\alpha}}{B e^{j\beta}} = \frac{A}{B} \cdot e^{j(\alpha-\beta)}.\quad (1.78)$$

Для того, чтобы были понятны операции умножения и деления с комплексными числами в алгебраической форме, рассмотрим эти операции применительно к мнимым единицам:

$$\begin{aligned}j \cdot j &= e^{j90^\circ} \cdot e^{j90^\circ} = e^{j180^\circ} = \cos 180^\circ + j \sin 180^\circ = -1; \\ j \cdot (-j) &= e^{j90^\circ} \cdot e^{-j90^\circ} = e^{j0^\circ} = \cos 0^\circ + j \sin 0^\circ = 1; \\ \frac{1}{j} &= \frac{e^{j0^\circ}}{e^{j90^\circ}} = e^{-j90^\circ} = -j; \\ \frac{1}{-j} &= \frac{e^{j0^\circ}}{e^{-j90^\circ}} = e^{j90^\circ} = j.\end{aligned}\quad (1.79)$$

Еще раз обратим внимание, что представление мнимой единицы в показательной форме позволяет наглядно объяснить получаемые результаты.

Сложение (вычитание) двух комплексных чисел:

$$\dot{C} = C_1 \pm j C_2 = (A_1 + j A_2) \pm (B_1 + j B_2) = (A_1 \pm B_1) + j(A_2 \pm B_2)\quad (1.80)$$

Умножение комплексных чисел:

$$\dot{C} = \dot{A} \cdot \dot{B} = (A_1 + j A_2) \cdot (B_1 + j B_2) = (A_1 \cdot B_1 - A_2 \cdot B_2) + j(A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_1)\quad (1.81)$$

(произведение $A_2 B_2$ отрицательно, так как согласно (4.21) $j^2 = -1$).

Введем понятие сопряженного комплекса. Две комплексные величины, имеющие равные модули и равные, но противоположные по знаку, аргументы, называются сопряженными. Если имеется комплексное число $\dot{A} = A e^{j\alpha} = A_1 + j A_2$, то сопряженное ему комплексное число запишется в виде

$\dot{A}^* = A e^{-j\alpha} = A_1 - jA_2$. Сопряженный комплекс – это вектор, зеркальный исходному относительно действительной оси на комплексной плоскости. Важно отметить следующее свойство сопряженных комплексных чисел:

$$\dot{A} \dot{A}^* = A e^{j\alpha} \cdot A e^{-j\alpha} = A_1^2 + A_2^2 = A^2. \quad (1.82)$$

Тот же результат получится, если перемножить эти комплексы в алгебраической форме.

Рассмотрим деление двух комплексных чисел. Умножим числитель и знаменатель дроби на комплекс, сопряженный знаменателю. Тогда:

$$\begin{aligned} \dot{C} = \frac{\dot{A}}{\dot{B}} &= \frac{A_1 + jA_2}{B_1 + jB_2} = \frac{(A_1 + jA_2) \cdot (B_1 - jB_2)}{(B_1 + jB_2) \cdot (B_1 - jB_2)} = \\ &= \frac{(A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2) + j(A_2 \cdot B_1 - A_1 \cdot B_2)}{B^2} = C_1 + jC_2; \end{aligned} \quad (1.83)$$

$$C_1 = \frac{A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2}{B^2}; \quad C_2 = \frac{A_2 \cdot B_1 - A_1 \cdot B_2}{B^2},$$

где $B^2 = B_1^2 + B_2^2$.

Рассмотрим полученные формулы (1.76) – (1.83). Очевидно, что пользоваться формулой (1.76) нецелесообразно, иначе говоря, сложение и вычитание комплексных чисел проще выполняется в алгебраической форме записи. Остальные действия можно выполнять при любой форме записи комплексных чисел.

Представляет интерес умножение комплексного числа на $\pm j$:

$$\begin{aligned} \dot{C} \cdot j &= C e^{j\lambda} \cdot e^{j90^\circ} = C e^{j(\lambda+90^\circ)}, \\ \dot{C} \cdot (-j) &= C e^{j\lambda} \cdot e^{-j90^\circ} = C e^{j(\lambda-90^\circ)}, \end{aligned}$$

т.е. *умножение комплексного числа на $\pm j$ приводит к повороту вектора на угол 90° в положительном или отрицательном направлении.*

Пример П.4.3.

а) Преобразовать комплексное число $\dot{A} = 100e^{j30^\circ}$, заданное в показательной форме записи, в алгебраическую.

Решение.

$$\dot{A} = 100 \cdot \cos 30^\circ + j100 \cdot \sin 30^\circ = 86,6 + j50.$$

б) Преобразовать комплексное число $\dot{A} = 50 - j86,6$, заданное в алгебраической форме, в показательную.

Решение.

На основании формул (4.16)

$$A = \sqrt{50^2 + 86,6^2} = 100;$$

$$\varphi = \arctg \frac{-86,6}{50} = -60^\circ.$$

Таким образом, $\dot{A} = 100e^{-j60^\circ}$.

в) Сложить два комплексных числа $\dot{A} = 20 + j30$ и $\dot{B} = 50 - j100$.

Решение.

$$\dot{C} = (20 + 50) + j(30 - 100) = 70 - j70.$$

г) Сложить два комплексных числа $A = 50e^{j30^\circ}$ и $B = 100e^{j135^\circ}$.

Решение.

Преобразуем комплексы в алгебраическую форму записи:

$$\dot{A} = 50 \cdot \cos 30^\circ + j50 \cdot \sin 30^\circ = 43,3 + j25;$$

$$\dot{B} = 100 \cdot \cos 135^\circ + j100 \cdot \sin 135^\circ = -70,7 + j70,7;$$

$$\dot{C} = -27,4 + j95,7 = 99,5 \cdot e^{j105,4^\circ}$$

(вектор находится во втором квадранте).

д) Перемножить комплексные числа, приведенные в пунктах в и г.

Решение.

$$1. \quad (20 + j30) \cdot (50 - j100) = 20 \cdot 50 + j30 \cdot 50 - \\ - j20 \cdot 100 + 30 \cdot 100 = 4000 - j500.$$

Примечание. $j \cdot (-j) = 1$.

$$2. \quad 50e^{j30^\circ} \cdot 100e^{j135^\circ} = 5000e^{j165^\circ}.$$

е) Разделить комплексные числа, приведенные в пунктах в) и г).

Решение.

$$1. \quad \dot{C} = \frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \frac{20 + j30}{50 - j100} = \frac{(20 + j30) \cdot (50 + j100)}{(50 - j100) \cdot (50 + j100)} = \\ = \frac{(20 + j30) \cdot (50 + j100)}{50^2 + 100^2} = \frac{-2000 + j3500}{12500} = -0,16 + j0,28.$$

$$2. \quad \frac{50e^{j30^\circ}}{100e^{j135^\circ}} = 0,5e^{-j105^\circ}.$$

1.4.5 СОПРОТИВЛЕНИЕ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Пусть через сопротивление r (рис. 1.73, а) протекает ток i .

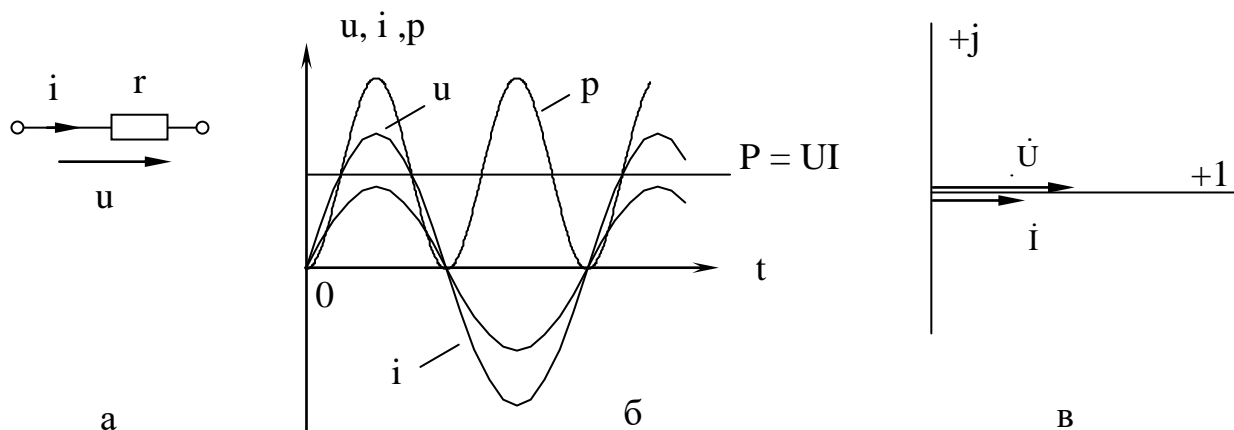


Рис. 1.73. Сопротивление с принятыми положительными направлениями тока и напряжения (а); временные диаграммы u , i , p (б); векторные диаграммы тока и напряжения (в)

$$u = r \cdot i = r \cdot I_m \sin \omega t = U_m \sin \omega t, \quad (1.84)$$

где $U_m = r \cdot I_m$.

Представим синусоидальный ток и напряжение комплексами. Тогда

$$Ue^{j0} = r \cdot Ie^{j0}, \quad (1.85)$$

откуда следует, что

$$\dot{U} = r \cdot \dot{I}, \quad (1.85a)$$

где \dot{U} , \dot{I} – комплексы действующих значений напряжения и тока.

Мгновенная мощность, выделяемая на сопротивлении, равна

$$p = u \cdot i = U_m I_m \sin^2 \omega t = UI(1 - \cos 2\omega t). \quad (1.86)$$

Мгновенная мощность, как это следует из (1.86), изменяется с двойной частотой относительно уровня, равного произведению действующих значений напряжения и тока UI . Причем, поскольку $|\cos 2\omega t| \leq 1$, то мгновенная мощность – величина неотрицательная, то есть всегда $p \geq 0$.

Так как мгновенная мощность никогда не приобретает отрицательных значений, то это означает только одно: энергия источнику нагрузкой обратно не возвращается. Следовательно, резистивному элементу соответствует только **необратимый процесс передачи электрической энергии от источника в нагрузку и преобразования ее в другой вид энергии** (тепловую, механическую, химическую и т.д.).

Наличие у тока (напряжения) начальной фазы, отличной от нуля, является следствием изменения начального положения вектора тока (напряжения) на комплексной плоскости. Ниже будет показано, что соотношения между током, напряжением и мощностью не зависят от начальных фаз тока и напряжения.

Средняя за период мощность равна:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u i \, d(\omega t) = \frac{U_m I_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t \, d(\omega t) = \frac{U_m I_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\omega t) \, d(\omega t) = \\ = \frac{U_m I_m}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2\omega t \, d(\omega t) = UI,$$

так как $\int_0^{2\pi} \cos 2\omega t \, d(\omega t) = 0$.

На рис. 1.73, б приведены временные диаграммы тока, напряжения и мгновенной мощности на сопротивлении, на рис. 1.73, в – векторные диаграммы напряжения и тока. Мгновенная мощность изменяется с двойной частотой. Ток и напряжение на сопротивлении совпадают по фазе.

Покажем, что наличие у тока ненулевой начальной фазы не изменяет полученных ранее выводов.

Пусть $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Согласно закону Ома $u = i \cdot r = I_m r \sin(\omega t + \psi_i)$. Следовательно, напряжение, приложенное к сопротивлению r , будет также синусоидально и синфазно току (аналогично (1.60)), причем $U_m = I_m \cdot r$.

Представим ток и напряжение комплексами

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i}, \quad \dot{U} = U e^{j\psi_i},$$

связь между которыми выражается законом Ома

$$\dot{U} = r \cdot \dot{I}.$$

Мгновенная мощность, выделяемая на сопротивлении, равна

$$p = u \cdot i = U_m I_m \sin^2(\omega t + \psi_i) = \frac{U_m I_m}{2} [1 - \cos(2\omega t + 2\psi_i)] = UI \cdot [1 - \cos(2\omega t + 2\psi_i)].$$

Среднее значение мощности за период

$$P = UI.$$

Аналогичные рассуждения могут быть проведены для индуктивности и емкости в цепи синусоидального тока.

1.4.6 ИНДУКТИВНОСТЬ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

На рис. 1.74, а изображена идеальная индуктивность с принятыми положительными направлениями тока и напряжения.

Положим начальную фазу тока в индуктивности, равной нулю:

$$i = I_m \sin \omega t.$$

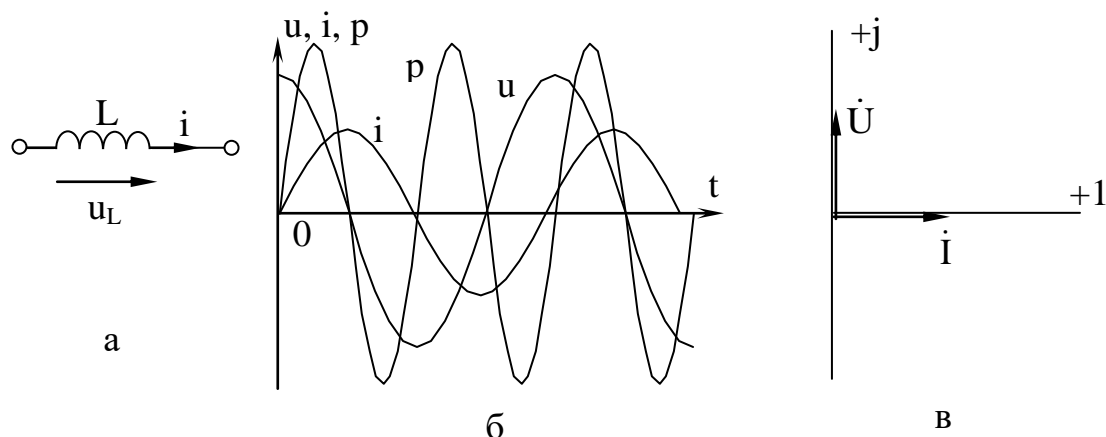


Рис.1.74. Идеальная индуктивность с принятыми положительными направлениями тока и напряжения (а); временные диаграммы тока, напряжения и мгновенной мощности (б); векторная диаграмма тока и напряжения (в)

Согласно (1.10) напряжение на индуктивности равно:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (1.87)$$

где $U_m = \omega L I_m$.

Перейдем от синусоидальных функций к комплексным изображениям:

$$U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow U_m e^{j\frac{\pi}{2}} = \dot{U}_m;$$

$$I_m \sin \omega t \Rightarrow I e^{j0} = \dot{I}.$$

Комплексы действующих значений

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}}; \quad \dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}}.$$

Из (1.87) следует, что

$$\dot{U} = \omega L \dot{I} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega L \dot{I}. \quad (1.88)$$

Следовательно, между комплексами напряжения и тока существует связь, аналогичная закону Ома, где в качестве сопротивления присутствует произведение $j\omega L$. Эта величина носит название мнимого или реактивного сопротивления и обозначается jx_L (индекс указывает, что сопротивление принадлежит индуктивности): $x_L = \omega L$.

С учетом этого (1.87) можно переписать в виде

$$\dot{U} = jx_L \dot{I}. \quad (1.88a)$$

Последнее выражение является математической записью закона Ома в

комплексной форме для идеальной индуктивности.

Из (1.87) и (1.88) следует, что **напряжение на индуктивности опережает ток на угол $\frac{\pi}{2}$** , что и показано на временных (рис.1.74, б) и векторной (1.74, в) диаграммах.

Мгновенная мощность в ветви с индуктивностью равна:

$$p = u \cdot i = I_m U_m \sin \omega t \cdot \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{U_m I_m}{2} \cdot 2 \cos \omega t \cdot \sin \omega t = UI \sin 2\omega t. \quad (1.89)$$

Она изменяется по синусоидальному закону с угловой частотой 2ω , и ее амплитуда равна произведению действующих значений тока и напряжения:

$$P = U \cdot I.$$

Средняя за период мощность в индуктивности равна нулю.

С введением термина «реактивное сопротивление» стало неудобным пользоваться термином «сопротивление» применительно к резисторам. Поэтому сопротивление резистора в цепях переменного тока принято называть **активным**, имея при этом в виду то, что только на активном сопротивлении потребляемая им мощность расходуется на выделение тепла.

1.4.7 ЕМКОСТЬ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Пусть ток, текущий через идеальную емкость (рис. 1.75, а), равен:

$$i = I_m \sin \omega t.$$

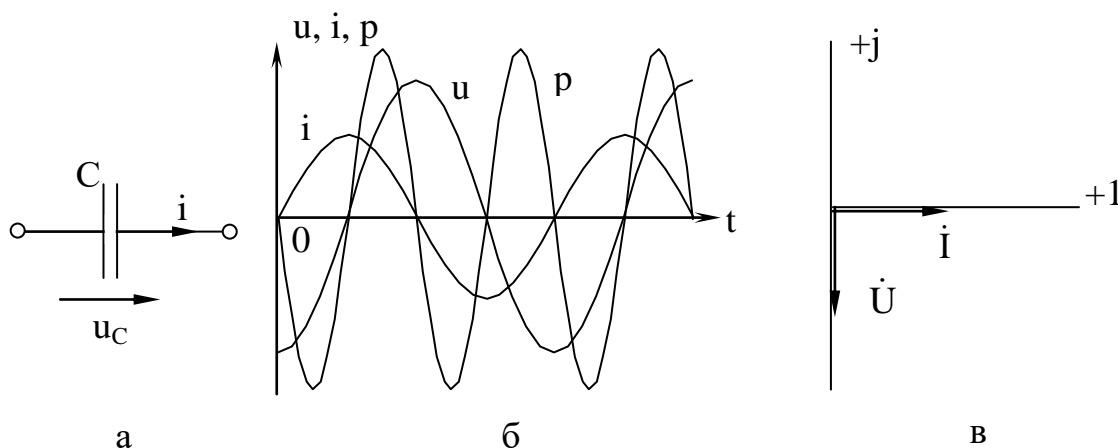


Рис.1.75. Идеальная емкость с принятыми положительными направлениями тока и напряжения (а); временные диаграммы тока, напряжения и мгновенной мощности (б); векторная диаграмма (в)

Тогда напряжение на емкости согласно (1.5) равно:

$$u = \frac{1}{C} \int i \, dt = \frac{1}{C} \int I_m \sin \omega t \, dt = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_m}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (1.90)$$

Подставив вместо мгновенных значений комплексные изображения, получим:

$$\dot{U}_m = \frac{\dot{I}_m}{\omega C} e^{-j90} = -\frac{j}{\omega C} \dot{I}_m.$$

Для комплексов действующих значений

$$\dot{U} = -\frac{j}{\omega C} \dot{I}, \quad (1.91)$$

или

$$\dot{U} = -jx_C \dot{I}, \quad (1.91a)$$

где $x_C = \frac{1}{\omega C}$ – реактивное емкостное сопротивление.

Из (1.90) и (1.91) очевидно, что **напряжение на емкости отстает от протекающего тока на угол $\frac{\pi}{2}$** (рис. 1.75, в).

Мгновенная мощность, поступающая в емкость,

$$p_c = u \cdot i = -UI \sin 2\omega t \quad (1.92)$$

изменяется с двойной частотой.

Средняя мощность за период равна нулю.

1.4.8 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ R, L и C В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 1.76.

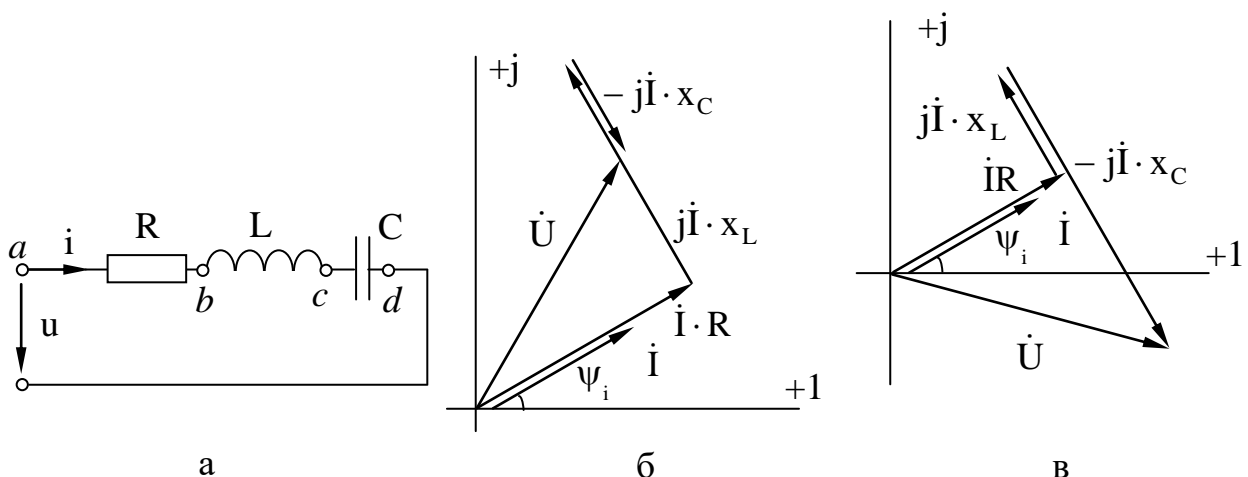


Рис. 1.76. Последовательное соединение R, L, C (а) и векторно-топографические диаграммы при $x_L > x_C$ (б) и $x_C > x_L$ (в)

Согласно (1.85а), (1.88) и (1.91) напряжения на элементах цепи в комплексном изображении будут равны соответственно:

$$\dot{U}_R = \dot{I} \cdot R; \quad \dot{U}_L = j\omega L \dot{I}; \quad \dot{U}_C = -\frac{j}{\omega C} \dot{I}.$$

Согласно второму закону Кирхгофа, напряжение, приложенное к последовательной ветви, равно сумме напряжений на ее элементах:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{I} \cdot \left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right) = \dot{I} \cdot \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]. \quad (1.93)$$

В (1.93) в скобках получено комплексное сопротивление вида $(R + jx)$, где $x = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$. Принято обозначать комплексное сопротивление буквой \underline{Z} , подчеркнутой снизу. Комплексное сопротивление \underline{Z} иначе называется полным сопротивлением:

$$\underline{Z} = R + jx = Ze^{j\varphi}, \quad (1.94)$$

где Z – модуль комплексного сопротивления, φ – его аргумент.

На рис. 1.76, б, в приведены так называемые векторно-топографические диаграммы, где изображены векторы тока и напряжений на элементах, причем конец вектора напряжения на одном элементе цепи служит началом вектора напряжения на следующем элементе в порядке их следования. Полученная сумма векторов равна в силу (1.93) вектору напряжения, приложенного к цепи.

В общем случае векторно-топографическая диаграмма строится путем последовательного обхода участка цепи в заданном направлении от элемента к элементу. С помощью векторно-топографической диаграммы удобно определять напряжения между отдельными точками цепи путем измерения в масштабе длины интересующего вектора и угла его поворота относительно положительного направления оси действительных чисел.

На рис. 1.76, б приведена векторно-топографическая диаграмма для схемы рис. 1.76, а, когда $x_L > x_C$. В этом случае говорят, что сопротивление цепи активно-индуктивное. Напряжение, приложенное ко всей цепи при $x_L > x_C$, опережает ток по фазе. Угол опережения (разность фаз между током и напряжением) φ лежит в пределах от 0 до 90°. Когда же $x_C > x_L$, то сопротивление цепи активно-емкостное, и напряжение отстает по фазе от тока. В этом случае возможные значения угла φ находятся в интервале от 0 до –90°.

Последовательно включенные активное и реактивное сопротивления могут быть изображены на комплексной плоскости (рис. 1.77).

Комплексное сопротивление \underline{Z} имеет действительную составляющую R и

мнимую $-x$. Модуль сопротивления Z и его аргумент φ соответственно равны:

$$Z = \sqrt{R^2 + x^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\pm x}{R}. \quad (1.95)$$

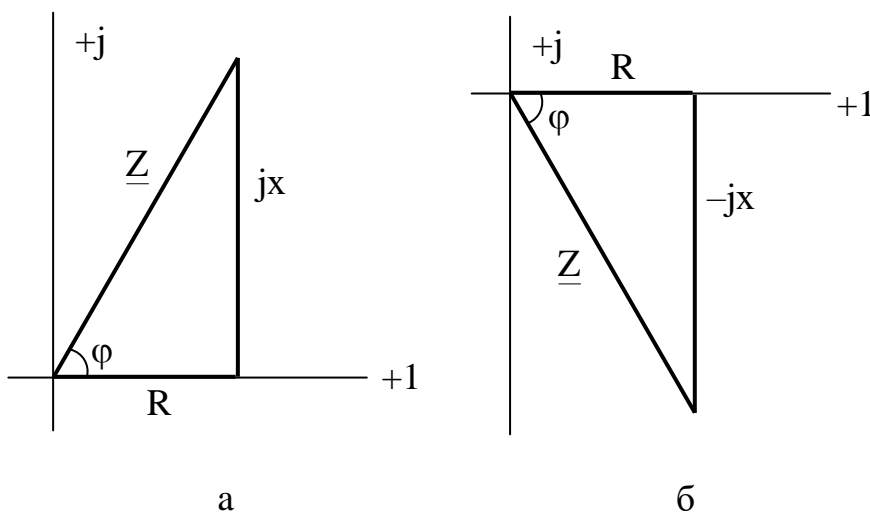


Рис. 1.77. Активно-индуктивный (а) и активно-емкостной (б) треугольники сопротивлений

При изображении сопротивлений R , x , Z на комплексной плоскости получается треугольник, где Z – гипотенуза, а R и x – катеты. При активно-индуктивном характере полного сопротивления цепи треугольник сопротивлений находится в первом квадранте, при активно-емкостном – в четвертом.

Угол φ между гипотенузой \underline{Z} и катетом R равен углу между током и напряжением на сопротивлении. Действительно,

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot Z e^{j\varphi}.$$

Правая часть уравнения свидетельствует, что модуль вектора напряжения равен произведению $I Z$ и повернут относительно вектора \dot{I} на угол φ .

Пример П.4.4. Изобразить схему замещения приемника, ток и напряжение которого выражаются функциями

$$u = U_m \sin(\omega t + 30^\circ), \quad i = I_m \sin(\omega t + 60^\circ).$$

Определить угол сдвига фаз между напряжением и током.

Решение. Угол сдвига фаз между напряжением и током равен $\varphi = \psi_u - \psi_i = -30^\circ$, т.е. характер сопротивления активно-емкостной (см. рис. 1.77, б).

Модуль полного сопротивления

$$Z = \frac{U_m}{I_m}.$$

Активное и реактивное сопротивление соответственно равны:

$$R = Z \cdot \cos \varphi, \quad x = Z \cdot \sin \varphi.$$

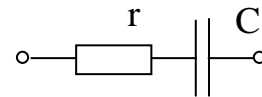


Рис. 1.78. Схема замещения к примеру П.4.4.

Схема замещения такого приемника электрической энергии приведена на рис. 1.78.

Пример П.4.5. Построить векторно-топографическую диаграмму напряжения, приложенного к цепи, состоящей из активного, емкостного и индуктивного сопротивлений (рис. 1.79), если известно, что $r = 10 \text{ Ом}$; $x_L = 15 \text{ Ом}$, $x_C = 5 \text{ Ом}$, $\dot{I} = 10 e^{j30^\circ} \text{ А}$. Определить комплексы действующих значений напряжений на элементах схемы, а также полного напряжения, приложенного к цепи, и напряжений между точками a и c и b и d схемы.

Решение.

Комплексы действующих значений напряжений на элементах равны:

$$\dot{U}_r = 10 e^{j30^\circ} \cdot 10 = 100 e^{j30^\circ};$$

$$\dot{U}_L = 10 e^{j30^\circ} \cdot 15 e^{j90^\circ} = 150 e^{j120^\circ},$$

$$\dot{U}_C = 10 e^{j30^\circ} \cdot 5 e^{-j90^\circ} = 50 e^{-j60^\circ}.$$

Построение топографической диаграммы начнем из начала координат. Под углом 30° к оси действительных чисел отмечаем направление тока и откладываем в масштабе в этом направлении вектор напряжения \dot{U}_r .

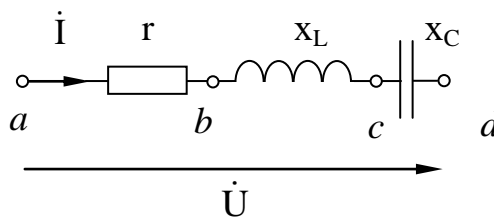


Рис. 1.79. Схема к примеру П.4.5

Приняв конец вектора \dot{U}_r за начало вектора \dot{U}_L , отложим его под углом 120° к оси действительных чисел или, что то же самое, под углом 90° к вектору \dot{U}_r . В свою очередь, приняв конец вектора \dot{U}_L за начало вектора \dot{U}_C , отложим под углом -60° к оси действительных чисел или в направлении, противоположном

ном вектору \dot{U}_L , вектор \dot{U}_C . Соединив начало координат с концом вектора \dot{U}_C (рис. 1.80), получим вектор искомого напряжения, длину которого и угол относительно оси действительных чисел можно измерить линейкой и транспортиром:

$$\dot{U} = 141 e^{j75^\circ}.$$

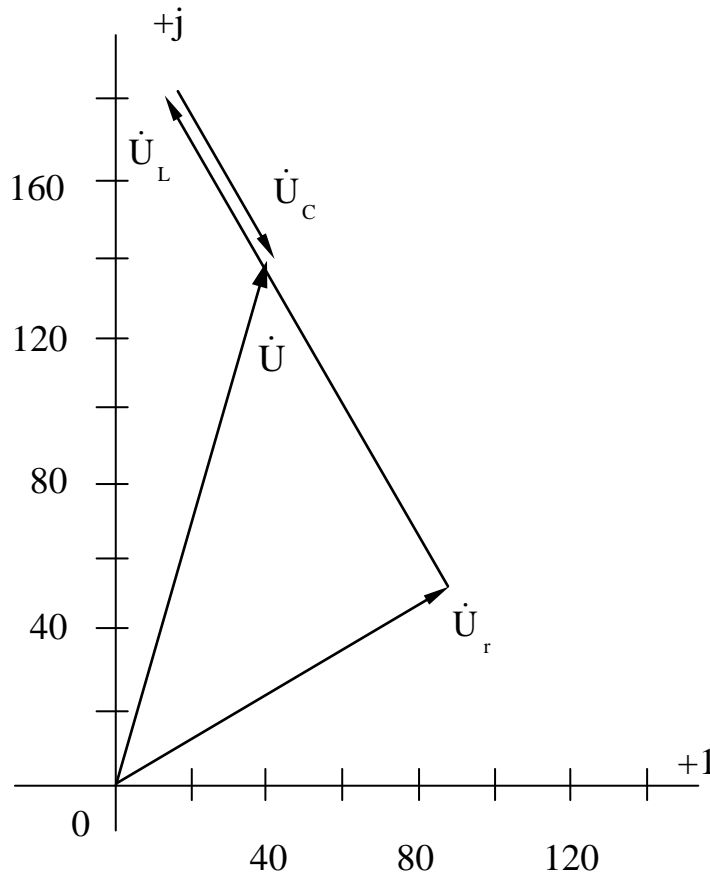


Рис. 1.80. Векторно-топографическая диаграмма к примеру П.4.5

Напряжение между точками a и c $\dot{U}_{ac} = 180 e^{j86^\circ}$, между точками b и d — $\dot{U}_{bd} = 100 e^{j120^\circ}$.

1.4.9 ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ g , L , C В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Рассмотрим цепь, состоящую из трех элементов g , L и C (рис. 1.81, а).

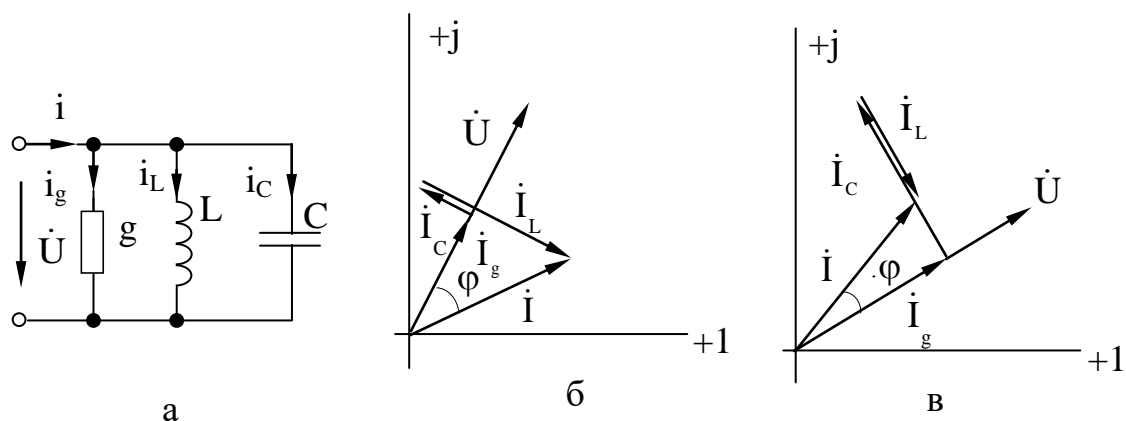


Рис. 1.81. Параллельное соединение элементов g, L, C (а); векторные диаграммы при $b_L > b_C$ (б) и $b_L < b_C$ (в)

Комплексы токов в цепи равны:

$$\dot{i}_g = \dot{U} \cdot g, \quad \dot{i}_L = \frac{\dot{U}}{j\omega L}, \quad \dot{i}_C = \dot{U} j\omega C.$$

Величины, обратные реактивным сопротивлениям, называются реактивными проводимостями и обозначаются:

$$b_L = \frac{1}{j\omega L} = -\frac{j}{\omega L}, \quad b_C = \frac{1}{-j\omega C} = j\omega C.$$

По первому закону Кирхгофа комплекс тока в цепи равен:

$$\dot{i} = \dot{U} \cdot \left[g + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right] = \dot{U} \cdot [g + j(b_C - b_L)] = \dot{U} \cdot [g + jb] = \dot{U} \underline{Y} = \dot{U} Y e^{j\varphi},$$

где $\underline{Y} = g + jb$ – комплексная (полная) проводимость цепи.

$$Y = \sqrt{g^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{b}{g}. \quad (1.96)$$

Подобно треугольнику сопротивлений на комплексной плоскости можно построить треугольник проводимостей (рис. 1.82).

Между полным сопротивлением ветви и полной проводимостью этой же ветви существует очевидная связь:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{(r + jx) \cdot (r - jx)} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j \frac{x}{r^2 + x^2}.$$

Откуда

$$g = \frac{r}{r^2 + x^2} = \frac{r}{Z^2}, \quad jb = -j \frac{x}{r^2 + x^2} = -j \frac{x}{Z^2}. \quad (1.97)$$

При активно-индуктивном характере полного сопротивления реак-

тивная проводимость получается отрицательной, при активно-емкостном – положительной.

Обратные преобразования дают:

$$r = \frac{g}{g^2 + b^2} = \frac{g}{Y^2}, \quad jb = -j \frac{x}{r^2 + x^2} = -j \frac{x}{Z^2}. \quad (1.98)$$

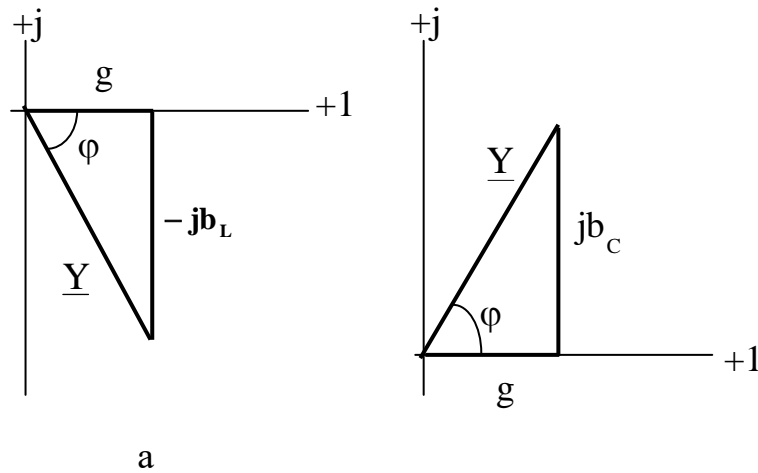


Рис.1.82. Треугольник проводимостей активно-индуктивного (а) и активно-емкостного характера (б)

Сопротивление $(r + jx)$ получается последовательным соединением двух сопротивлений – активного и реактивного, а проводимость $(g + jb)$ – параллельным соединением активной и реактивной проводимостей. Поэтому уравнения (1.96) и (1.97) могут рассматриваться как уравнения преобразования последовательного соединения сопротивлений r и x (рис. 1.83, а) в параллельное (рис. 1.83, б), где обозначено:

$$R' = \frac{1}{g} = \frac{r^2 + x^2}{r} = \frac{Z^2}{r}; \quad (1.99)$$

$$x' = \frac{1}{b} = \frac{r^2 + x^2}{x} = \frac{Z^2}{x}.$$

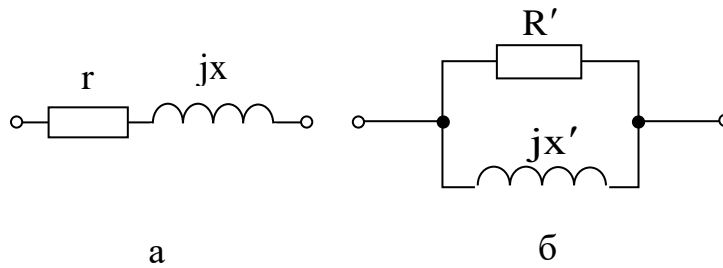


Рис.1.83. Иллюстрация к преобразованию последовательного соединения сопротивления в параллельное

Существенно, что *угол φ в треугольнике проводимостей, полученных согласно (1.95), по величине такой же, как и в треугольнике искомых сопротивлений, но с противоположным знаком.*

Примеры определения эквивалентных комплексных сопротивлений двух-полюсников, состоящих из R, L, C – элементов приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

	\doteq		$=$		$\underline{Z} = R + jX_L - jX_C;$
	\doteq		$=$		$\underline{Z} = R + \frac{jX_L \cdot (-jX_C)}{jX_L - jX_C};$
	\doteq		$=$		$\underline{Z} = -jX_C + \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L};$
	\doteq		$=$		$\underline{Z} = jX_L + \frac{R \cdot (-jX_C)}{R - jX_C};$
	\doteq		$=$		$\underline{Z} = 1/\underline{Y}$ $\underline{Y} = G - jb_L + jb_C;$ $G = 1/R; \quad b_L = 1/X_L;$ $b_C = 1/X_C$

1.4.10 ЗАКОНЫ КИРХГОФА В ЦЕПЯХ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА И МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА

Из изложенного выше следует, что *законы Кирхгофа в цепи синусоидального тока справедливы для мгновенных и для комплексных значений, но не для действующих значений*, то есть первый закон Кирхгофа для мгновенных значений и комплексов записывается в виде

$$\sum_1^n \dot{i}_k = 0, \quad \sum_1^n \dot{I}_k = 0; \quad (1.100)$$

а второй закон –

$$\sum_1^n u_k = 0, \quad \sum_1^n \dot{U}_k = 0. \quad (1.101)$$

Записи

$$\sum_1^n I_k = 0, \quad \sum_1^n U_k = 0$$

неверны, поскольку они справедливы только в некоторых частных случаях.

Если законы Кирхгофа справедливы для комплексных значений, значит, все методы расчета, рассмотренные в главах 2 и 3, справедливы для комплексных значений.

Пример П.4.6. Узел объединяет три ветви. В двух из них действующие значения токов соответственно равны $I_1 = 3$ А, $I_2 = 4$ А, причем угол между токами равен 45° . Определить действующее значение тока в третьей ветви.

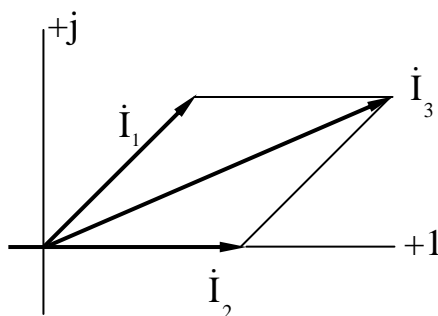


Рис. 1.84. Векторная диаграмма токов к примеру П.4.6

Решение.

Отложим из начала координат по горизонтальной оси вектор одного из токов, например, I_2 (рис. 1.84). Под углом 45° к нему проведем из начала координат вектор тока I_1 . Модуль геометрической суммы двух векторов будет равен действующему значению тока I_3 . Нетрудно убедиться, что величина тока I_3 не зависит от того, в каком направлении от горизонтальной оси откладывается вектор тока I_2 .

Пример П.4.7. Узел объединяет три ветви с токами $I_1 = 3$ А, $I_2 = 4$ А, $I_3 = 5$ А. Определить направления токов относительно тока I_2 .

Решение.

Геометрическая сумма трех токов в узле согласно первому закону Кирхгофа должна равняться нулю, что возможно, если из векторов токов построить треугольник. Есть два варианта решения: когда токи образуют контуры с направлением обхода по часовой (рис. 1.85, а) и против часовой (рис. 1.85, б) стрелки. Соответствующие векторные диаграммы токов приведены на рис. 1.86, а, б.

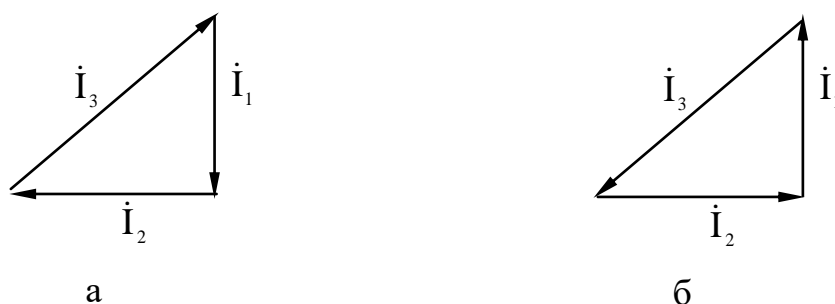


Рис. 1.85. К примеру П.4.7

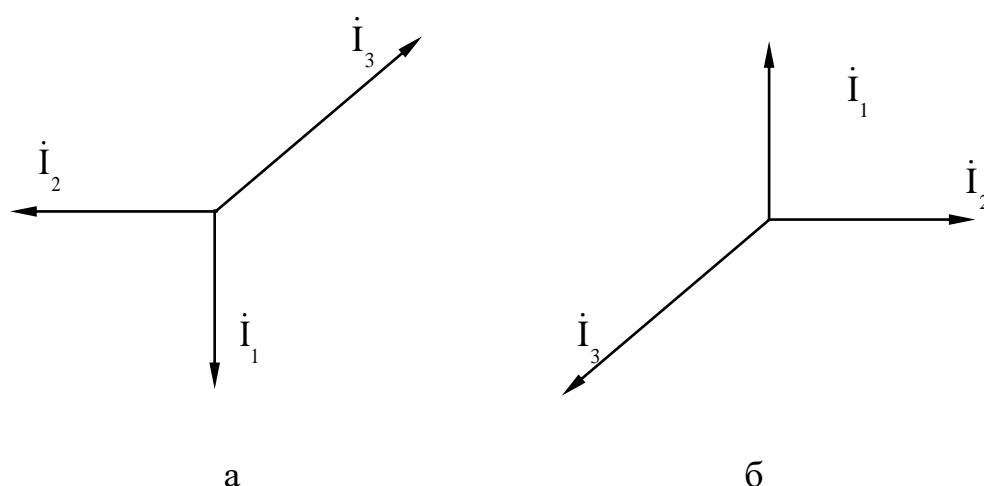


Рис. 1.86 Векторные диаграммы токов к примеру П.4.7

1.4.11 АКТИВНАЯ, РЕАКТИВНАЯ И ПОЛНАЯ МОЩНОСТИ

Активной мощностью P в электрической цепи при периодических процессах называют среднее значение мощности за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt.$$

Положив напряжение и ток на участке цепи равными соответственно

$$u = U_m \sin \omega t, \quad i = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

получим:

$$P = \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T 2 \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) \, dt = \frac{UI}{T} \int_0^T [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] \, dt.$$

Так как

$$\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) \, dt = 0,$$

то

$$P = UI \cos \varphi, \quad (1.102)$$

где φ – *угол между током и напряжением – равен аргументу комплексного сопротивления \underline{Z}* .

Множитель $\cos \varphi$ называют коэффициентом мощности. Так как $\cos \varphi \leq 1$, то $P \leq UI$.

Измеряется активная мощность в ваттах (Вт).

С учетом того, что $U = IZ$, получим:

$$P = I^2 Z \cos \varphi = I^2 R. \quad (1.103)$$

Аналогично через проводимость получим $I = UY$ и

$$P = U^2 Y \cos \varphi = U^2 g. \quad (1.104)$$

Величину

$$S = UI \quad (1.105)$$

называют полной мощностью, которая измеряется в вольт-амперах (ВА). По аналогии с (4.45) и (4.46) получим:

$$S = I^2 Z, \quad S = U^2 Y. \quad (1.106)$$

Реактивная мощность определяется выражением

$$Q = UI \sin \varphi \quad (1.107)$$

и оценивается как среднее за четверть периода значение энергии, которую отдает источник питания реактивным элементам (индуктивностям и емкостям) на создание переменного магнитного и электрического полей.

Реактивная мощность может быть выражена через реактивные сопротивление и проводимость:

$$Q = I^2 x, \quad Q = U^2 b. \quad (1.108)$$

Измеряется реактивная мощность в вольт-амперах реактивных (ВАр).

Полная, активная и реактивная мощности согласно (1.105), (1.102) и (1.107) взаимосвязаны:

$$S^2 = P^2 + Q^2; \quad \varphi = \arctg \frac{\pm Q}{P}. \quad (1.109)$$

Мощности могут быть изображены на комплексной плоскости в виде треугольника мощностей (рис. 1.87).

Из рис. 1.87 следует, что полную мощность можно представить в виде комплекса:

$$\dot{S} = P + jQ. \quad (1.110)$$

Выразим комплексную полную мощность через комплексы напряжения и тока. Очевидно, что

$$\dot{S} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = UI e^{j\varphi} = UI e^{j(\psi_u - \psi_i)} = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = \dot{U} \dot{I}^*. \quad (1.111)$$

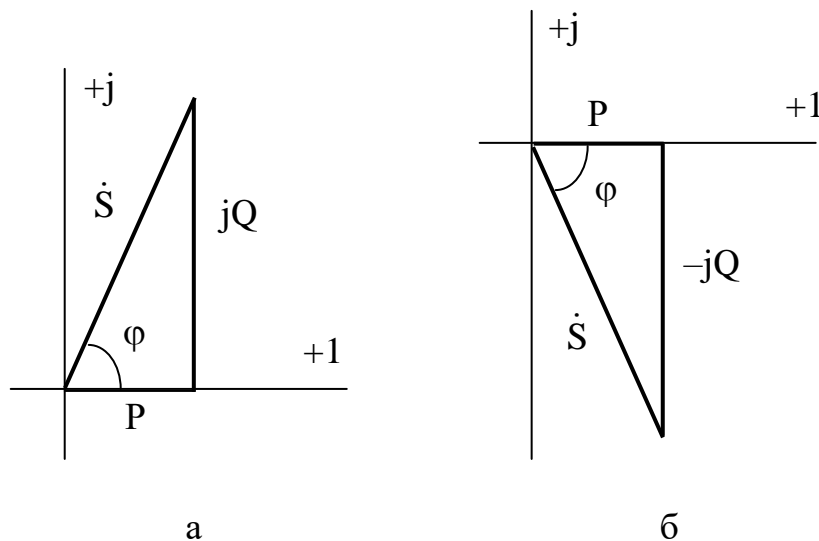


Рис. 1.87. Треугольники мощностей при активно-индуктивном (а) и активно-емкостном (б) характере нагрузки

Следовательно, полная мощность равна произведению комплекса напряжения на сопряженный комплекс тока.

Также очевидно, что

$$P = \operatorname{Re} \left(\dot{U} \dot{I}^* \right); \quad Q = \operatorname{Im} \left(\dot{U} \dot{I}^* \right). \quad (1.112)$$

Следует отметить, что *угол φ между активной и полной мощностью равен углу между активным и полным сопротивлением.*

Пример П.4.8. Определить активную, реактивную и полную мощности, если:

а) $u = 141 \sin(314t + 30^\circ)$ В, $i = 7,07 \sin(314t + 60^\circ)$ А;

б) $U = 200$ В, $I = 10$ А, $\varphi = 30^\circ$ (индуктивный характер нагрузки);

в) $\dot{U} = (20 + j30^\circ)$, $\dot{I} = (3 - j4)$ А;

г) $\dot{U} = 70e^{j40^\circ}$ В, $\dot{I} = 5e^{j60^\circ}$ А.

Решения. а) Комплексы напряжения и тока равны:

$$\dot{U} = 100e^{j30^\circ}, \quad \dot{I} = 5e^{j60^\circ}.$$

Поэтому

$$S = 100 \cdot 5 = 500 \text{ ВА};$$

$$P = 500 \cos(30^\circ - 60^\circ) = 433 \text{ Вт};$$

$$Q = 500 \sin(-30^\circ) = -250 \text{ ВАр}.$$

в) $\dot{S} = \dot{U} \dot{I}^* = (20 + j30) \cdot (3 + j4) = (-60 + j170) = 180,3e^{j109,4^\circ}$, поэтому

$$S = 180,3 \text{ ВА}, P = -60 \text{ Вт}, Q = 170 \text{ ВАр}.$$

Ответы:

б) $S = 2000 \text{ ВА}, P = 1732 \text{ Вт}, Q = 1000 \text{ ВАр},$

г) $S = 180,3 \text{ ВА}, P = 388,9 \text{ Вт}, Q = 170 \text{ ВАр}.$

1.4.12 МГНОВЕННАЯ МОЩНОСТЬ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Рассмотрим изменение мгновенной мощности в цепи, состоящей из последовательно включенных элементов r , L и C (рис. 1.79).

Положим $u = U_m \sin \omega t$; $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$. Тогда для отдельных элементов имеем:

$$\left. \begin{aligned}
p_r &= u_r i = r I_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = r (\sqrt{2} I)^2 \left(\frac{1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} \right) = \\
&= U_r I [1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)] = UI \cos \varphi [1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)]; \\
p_L &= u_L i = \omega L I_m^2 \cos(\omega t + \varphi) \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \\
&= \omega L (\sqrt{2} I)^2 \cdot \frac{1}{2} \sin(2\omega t + 2\varphi) = U_L I \sin(2\omega t + 2\varphi); \\
p_C &= u_C i = -\frac{I_m^2}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi) \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \\
&= -\frac{(\sqrt{2} I)^2}{\omega \cdot C} \cdot \frac{1}{2} \sin(2\omega t + 2\varphi) = -U_C I \sin(2\omega t + 2\varphi),
\end{aligned} \right\}, \quad (1.113)$$

где $\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}$.

Суммарная мощность на конденсаторе и катушке индуктивности

$$\begin{aligned}
p_x &= p_L + p_C = (U_L - U_C) \cdot I \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi) = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cdot I^2 \sin(2\omega t + 2\varphi) = \\
&= x I^2 \sin(2\omega t + 2\varphi) = UI \sin \varphi \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi) .
\end{aligned}$$

Мощность на зажимах всей цепи

$$\begin{aligned}
p &= p_r + p_L + p_C = p_r + p_x = UI \cos \varphi [1 - UI \cos(2\omega t + 2\varphi)] + \\
&+ UI \sin \varphi \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi) .
\end{aligned} \quad (1.114)$$

Средняя за период мощность равна средней мощности на активном сопротивлении, средняя мощность за период в реактивных сопротивлениях равна нулю.

Из (1.114) следует, что мгновенная мощность равна сумме постоянной по величине активной мощности P и изменяющейся с двойной частотой переменной составляющей с амплитудой UI . На рис. 1.88 приведены временные диаграммы тока, напряжения и мощности в активно-индуктивном сопротивлении.

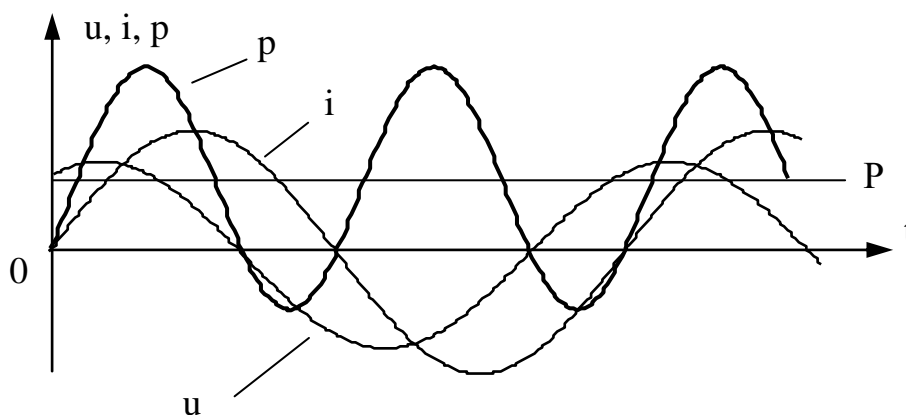


Рис. 1.88. Изменение мгновенной мощности в активно-индуктивном сопротивлении

Напряжение опережает по фазе ток на угол φ . В те промежутки времени, когда ток и напряжение имеют одинаковый знак, мгновенная мощность положительна; отрицательна она тогда, когда эти величины имеют разные знаки, и часть периода, в течение которого мощность отрицательна, определяется отношением $t = \frac{\varphi}{\omega}$.

1.4.13 ДВУХПОЛЮСНИК В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Для любой сложной цепи с постоянными параметрами при приложенном ко входу синусоидальном напряжении входной ток будет также синусоидальным и иметь в общем случае фазовый сдвиг на некоторый угол φ относительно приложенного напряжения.

Рассматривая всю цепь как пассивный двухполюсник и не рассматривая ее внутреннего строения, можно охарактеризовать цепь некоторыми эквивалентными параметрами – либо сопротивлением \underline{Z} , либо проводимостью \underline{Y} .

Рассмотрим некоторый двухполюсник, изображенный на рис. 1.89.

Очевидно, что модуль полного эквивалентного сопротивления цепи равен:

$$Z = \frac{U}{I}$$

и может быть определено по показаниям вольтметра и амперметра.

Эквивалентное активное сопротивление определим как отношение активной мощности к квадрату тока:

$$R = \frac{P}{I^2}.$$

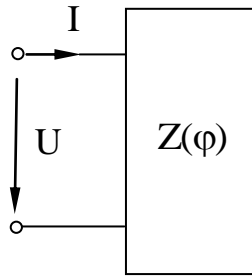


Рис. 1.89. Эквивалентный двухполюсник пассивной цепи

Из треугольника сопротивлений следует, что

$$x = \sqrt{Z^2 - R^2}.$$

Характер сопротивления можно определить, включив последовательно с двухполюсником небольшую (пробную) индуктивность. Если при подключении пробной индуктивности входной ток уменьшится, значит, реактивное сопротивление увеличилось, т.е. увеличилась разность

$$x = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right),$$

а это свидетельствует об индуктивном характере сопротивления. Если, наоборот, входной ток возрастет, то характер реактивного сопротивления – емкостной.

Аналогично определяются эквивалентные проводимости:

$$Y = \frac{I}{U}, \quad g = \frac{P}{U^2}, \quad b = \sqrt{Y^2 - g^2}.$$

Характер реактивной проводимости определяется по изменению тока при параллельном подключении к двухполюснику небольшой (пробной) емкости. Если при подключении пробной емкости входной ток увеличится, значит, увеличилась реактивная проводимость

$$b = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right),$$

т.е. эквивалентная реактивная проводимость двухполюсника имеет емкостной характер. Уменьшение входного тока свидетельствует об ее индуктивном характере.

Примеры и упражнения

П.4.9. Определить разность фаз двух синусоидально изменяющихся величин

$$a_1 = A_{1m} \sin\left(314t + \frac{\pi}{6}\right), \quad a_2 = A_{2m} \sin\left(314t - \frac{\pi}{3}\right),$$

а также отрезок времени Δt , разделяющий моменты прохождения их через максимумы.

Ответ: $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\Delta t = 0,005$ с.

П.4.10. Частота колебаний синусоидально изменяющейся величины $a = 100\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ равна $f = 50$ Гц.

Определить ее мгновенное значение в момент времени $t = \frac{1}{80}$ с.

Ответ: -100 .

П.4.11. К узлу электрической цепи (рис. 4.27) подходят два тока: $i_1 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 45^\circ)$ А и $i_2 = 14,1\sin(\omega t - 135^\circ)$ А.

Найти ток в третьей ветви.

Ответ: $i_3 = 0$.

П.4.12. Полное сопротивление Z цепи на рис. 4.28 при частоте $f = 50$ Гц равно 5 Ом. Чему будет равно ее полное сопротивление при частоте $f = 150$ Гц?

Ответ: $Z = 9,85$ Ом.

П.4.13. Изобразить последовательную схему замещения приемника электрической энергии и определить ее параметры (R , x), если известно, что напряжение и ток данного приемника выражаются функциями $u = 112\sin(\omega t - 11^\circ 30')$ В, $i = 2,8\sin(\omega t - 48^\circ 30')$.

Ответ: $R = 32 \text{ Ом}$, $x_L = 24 \text{ Ом}$.

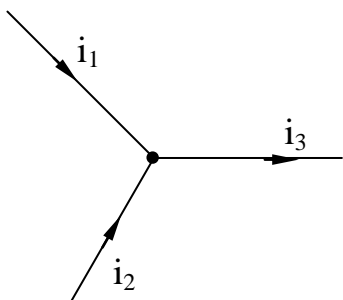


Рис. 4.27. Узел цепи к задаче П.4.11

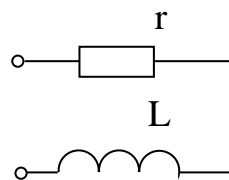


Рис. 4.28. Схема цепи к задаче П.4.12